Guía de Ejercicios 2

Prof. Álvaro S. Núñez   Prof. Aux. Patricio Cubillos   Prof. Aux. Valesca Valdivia

4 de enero de 2007

.

Ejercicio 1: Derivación explícita

A partir de la definición de derivada determine la derivada de $\tan x$. Compare con la derivada obtenida a partir de la regla para derivar fracciones.
También usando solo la definición de derivada pruebe que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \tag{1}$$

Ejercicio 2: Tasas de cambio

1. Una escalera de 5 m. esta apoyada en la pared de una casa. La base es separada de la pared a una tasa de 1 m/s. Determine la rapidez de caída del extremo superior cuando la base esta a 1 m de la pared, a 4 m. de la pared.
2. Al inflar un globo se bombea aire a razón de 30 cm^3 por minuto. Encuentre la tasa de cambio del radio cuando este es de 2 cm.
3. La aceleración de gravedad fluctúa de un punto a otro sobre la superficie de la Tierra. Con ello el periodo de oscilación de un péndulo,

   $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \tag{2}$$

   también varía. Estime el error relativo en g si se puede medir T con un error del 0.1 %.

.

.

Ejercicio 3: Calcule las derivadas

1. $f(x) = (2x-7)^3$
2. $f(x) = \left(\frac{1}{t-3}\right)^2$
3. $f(x) = \sqrt{a-bx^2}$, donde a y b son constantes.
4. $f(x) = \sin \pi x$.
5. $f(x) = \tan x$.
6. $f(x) = \cos(\sin(x))$.
7. $f(x) = \frac{\cos x + 1}{x}$.
8. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.
9. $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$

.

Ejercicio 4: Ecuaciones diferenciales

- Verifique que:
  1. $u = \sin x$ es solución de $\frac{d^2u}{dx^2} = -u$. Pruebe lo mismo para $\cos x$.
  2. $v = \tan x$ es solución de $\frac{du}{dx} = 1 - u^2$.
- Resuelva:
  $$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \tag{3}$$
  Interprete la presencia de coeficientes indeterminados. Ahora discuta las propiedades de la solución de la ecuación:
  $$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \kappa \frac{dy}{dt}. \tag{4}$$
- Por último demuestre que si $x(t)$ satisface la ecuación diferencial:
  $$\ddot{x} = -\omega^2 x, \tag{5}$$
  donde ω es una constante, entonces tenemos que, $\mathcal{E}$, definido por:
  $$\mathcal{E} = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2}, \tag{6}$$
  es una constante, i.e. $d\mathcal{E}/dt = 0$.

.

Ejercicio 5: Optimización

Verifique intuitivamente que si x_0 es un máximo de la función $f(x)$ entonces la derivada de la función se anula en dicho punto. Muestre que lo mismo ocurre si se trata de un mínimo. Haciendo uso de esta noción demuestre las siguientes afirmaciones:

1. El rectángulo de área máxima para un perímetro $\mathcal{P}$ dado es el cuadrado de lado $\mathcal{P}/4$. (Use un análisis similar para encontrar la caja de volumen máximo dado el área del carton usado para construirla.)
2. La recta de distancia mínima a una curva desde un punto Q dado es tal que la intersecta en forma perpendicular (ver figura (1a)).
3. Dados dos puntos A y B, encuentre el punto P en una recta dada de modo que $AP + BP$ sea mínimo (ver figura (1b)).

Ahora, considere el siguiente problema desafío. Dados tres puntos A, B y C, encuentre el punto P tal que la distancia $AP + BP + CP$ sea la mínima (ver figura (1c)).

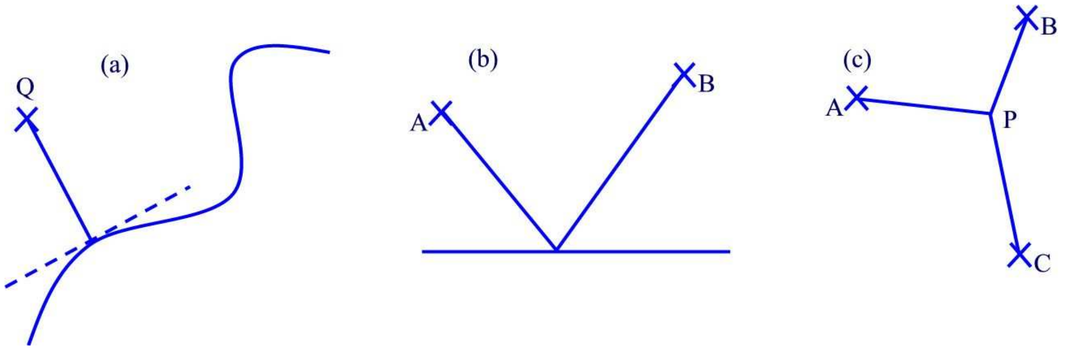

Figura 1: Tres problemas de minimización geométrica, se pueden resolver usando exclusivamente geometría o utilizando derivadas.

Ejercicio 6: Otra vez el $\cos(\alpha + \beta)$.

En clase se vio que la función exponencial puede ser extendida a los números complejos mediante una cuidadosa manipulación de su serie de potencias. En particular, vimos que $\exp(\boldsymbol{i}\theta) \equiv \cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta$. Use esta relación para demostrar el desarrollo de $\cos(\alpha + \beta)$ y $\sin(\alpha + \beta)$.