

Guía de Ejercicios 1

Prof. Álvaro S. Núñez

Prof. Aux. Patricio Cubillos

Prof. Aux. Valesca Valdivia

3 de enero de 2007

Los siguientes ejercicios tienen por objetivo ayudar al estudiante a hacer un repaso de los conceptos básicos de trigonometría y álgebra que adquirió en la primera parte del curso.

EJERCICIO 1: REPASO DE TRIGONOMETRÍA

Verifique las siguientes identidades:

1. $(\sin A - \csc A)^2 + (\cos A - \sec A)^2 = \cot^2 A + \tan^2 A - 1$

2. $\sin^2 x + \sin^2 x \left(1 - \frac{1}{\csc^2 x}\right) = 1 - \cos^4 x$

3. $(1 - \sin \theta)(1 - \sin \phi) = \left(\sin \frac{\theta+\phi}{2} - \cos \frac{\theta-\phi}{2}\right)^2$

4. $\tan \theta = \frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1 + \cos \theta + \cos 2\theta}$

5. $\sum_{\nu=0}^N \sin(\alpha + \nu\beta) = \frac{\sin \frac{N\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin\left(\alpha + \frac{N-1}{2}\beta\right)$

6. $\sum_{\nu=0}^N \cos(\alpha + \nu\beta) = \frac{\sin \frac{N\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos\left(\alpha + \frac{N-1}{2}\beta\right)$

Estas últimas identidades serán usadas en el capítulo de integración.

Ahora considere el siguiente problema. Desde cada extremo de una base de longitud $2a$, la elevación angular de una montaña es θ y desde el medio de la base la elevación es ϕ . Pruebe que la altura de la montaña es:

$$h = a \sin \theta \sin \phi \sqrt{\csc(\phi + \theta) \csc(\phi - \theta)} \quad (1)$$

EJERCICIO 2: DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA DE LA EXPANSIÓN DEL $\cos(\alpha + \beta)$

En clase se vio que:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (2)$$

explotando el teorema del coseno. Este problema consiste en evaluar dicho coseno mediante el uso de geometría.

Intente una demostración de la identidad correspondiente a la tangente:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (3)$$

EJERCICIO 3: ECUACIÓN DE UNA ELIPSE

Una elipse es definida como el conjunto de puntos cuyas distancias a dos puntos dados (focos F y F') suman un valor constante predeterminado. Sea L la distancia entre los focos. Escojamos, arbitrariamente, un foco F . Sea θ el ángulo formado entre la recta que une F con los puntos de la elipse y Λ el valor de la suma de las distancias a los focos, de modo que

$$|MF| + |MF'| = \Lambda. \quad (4)$$

para todos los puntos M en la elipse. Pruebe que:

$$r = L \frac{\Omega}{1 - \varepsilon \cos \theta}, \quad (5)$$

donde r es la distancia entre el punto y el foco, $\varepsilon = \frac{L}{\Lambda}$ y $\Omega = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}$. Verifique que dicha ecuación entrega los valores correctos para $\theta = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.

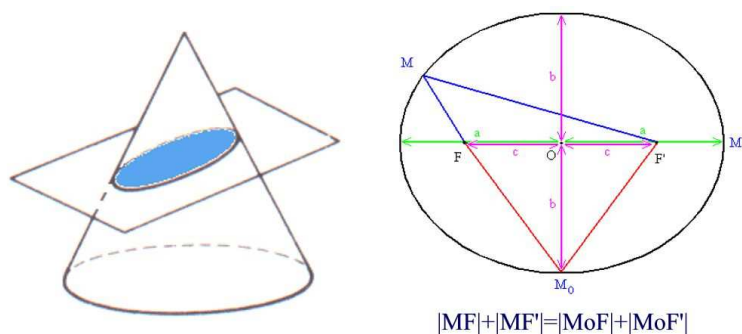


Figura 1: Dos definiciones alternativas de una elipse. A la izquierda como una sección cónica, a la derecha como el conjunto de puntos cuyas distancias a dos puntos dados (focos F y F') es igual a una constante dada. Esta última definición es la usada en el ejercicio 3.

EJERCICIO 4: APROXIMACIONES

1. Defina un día sideral y un día solar para un habitante de la Tierra (Ver NZ pág. 19) ¿A cuántos radianes por segundo está girando el planeta Tierra, en torno a su eje de rotación y en torno al Sol?
2. ¿Cuántos metros *cae* la Luna hacia la Tierra en un segundo? (Utilice el valor de la distancia Tierra-Luna de 384.000 km.) Compare con la aceleración de gravedad en la superficie de la tierra.

3. ¿A qué distancia ve el horizonte un hombre de altura media?
4. La parte superior del mástil de un barco está 20 m. sobre el nivel del mar y desde allí se alcanza a ver la luz de un faro. Después de media hora de navegar directamente al faro, este se alcanza a ver desde la cubierta que está a 8 m. sobre el nivel del mar. Determine la velocidad del barco.

EJERCICIO 5: LÍMITES

Complete la siguientes tablas con ayuda de una calculadora:

| x | $\sin x$ | $\frac{\sin x}{x}$ | $\epsilon = 1 - \frac{\sin x}{x}$ | ϵ/x |
|-----------|----------|--------------------|-----------------------------------|--------------|
| 1 | | | | |
| 10^{-1} | | | | |
| 10^{-2} | | | | |
| 10^{-3} | | | | |
| 10^{-4} | | | | |

(6)

| x | $\cos x$ | $1 - \cos x$ | $\epsilon = \frac{1 - \cos x}{x}$ | ϵ/x |
|-----------|----------|--------------|-----------------------------------|--------------|
| 1 | | | | |
| 10^{-1} | | | | |
| 10^{-2} | | | | |
| 10^{-3} | | | | |
| 10^{-4} | | | | |

(7)

Usando los resultados entregue un sentido a las expresiones:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \delta}{\delta} = 0. \quad (9)$$

Demuestre que en general, partiendo de la relación (vista en clases) $\sin x < x$, que las siguientes desigualdades son siempre válidas:

$$\cos \theta > 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (10)$$

$$\sin \theta > \theta - \frac{\theta^3}{4} \quad (11)$$

Úselas para verificar analíticamente los límites en cuestión.

EJERCICIO 6: ÁREA DEL CÍRCULO Y OTROS LÍMITES

- Demostrar que cuando n es un número indefinidamente grande, el límite de:

$$\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta} \quad (12)$$

- Considere un círculo de radio R , que es seccionado (como una pizza) en n piezas iguales (de apertura angular $2\pi/n$). Considere los triángulos asociados a esta repartición que forman un polígono de n lados iguales. Calcule el área de este polígono A_n y verifique que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \pi R^2 \quad (13)$$

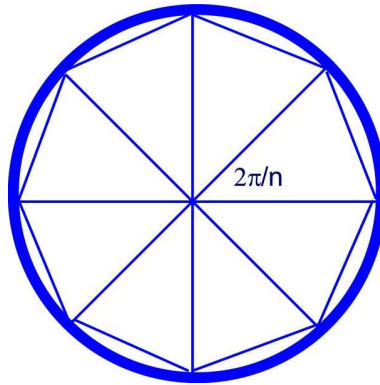


Figura 2: El círculo de radio R es dividido en trozos de ángulo $2\pi/n$ (en la figura $n = 8$.)