

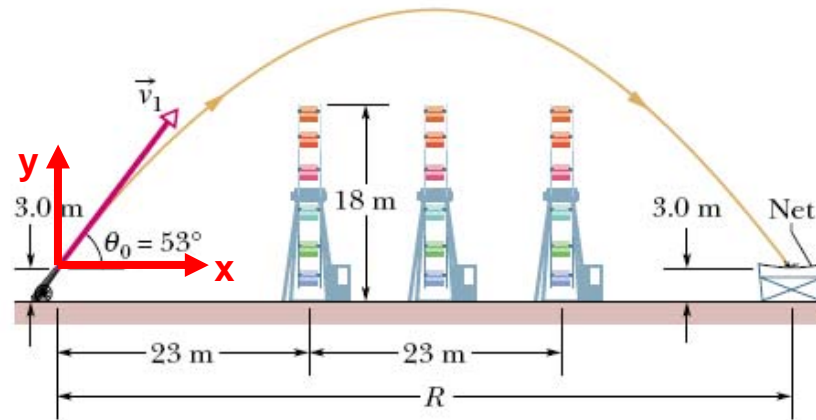
Movimiento en dos dimensiones

En 1922, uno de los Zacchinis, una famosa familia de circenses italianos, fue la primera “bala humana” disparada por un cañón. Para aumentar la espectacularidad del acto, la familia aumento gradualmente la distancia del vuelo, hasta que, en 1940, Emanuel Zacchini voló sobre tres ruedas de la fortuna, atravesando una distancia horizontal de 69 m.



¿Cómo pudo saber donde colocar la red y cómo pudo estar seguro que alcanzaría altura suficiente para no golpear las ruedas de la fortuna?





$$x_1 = y_1 = 0$$

Condiciones iniciales

$$v_1 = 26,5 \text{ m/s}$$

$$\theta_1 = 53^\circ$$

Ecuaciones de movimiento

$$x = v_1 \cos \theta_1 t$$

$$y = v_1 \sin \theta_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

¿Pasa por arriba de la primera rueda de la fortuna?

$$t_2 = \frac{x_2}{v_1 \cos \theta_1} \Rightarrow y_2 = v_1 \sin \theta_1 \left(\frac{x_2}{v_1 \cos \theta_1} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_2}{v_1 \cos \theta_1} \right)^2$$

Evaluando

$$y_2 = (\tan 53^\circ)(23 \text{ m}) - \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(23 \text{ m})^2}{2(26,5 \text{ m/s})^2 (\cos 53^\circ)^2}$$

$$y_2 = 20,3 \text{ m}$$

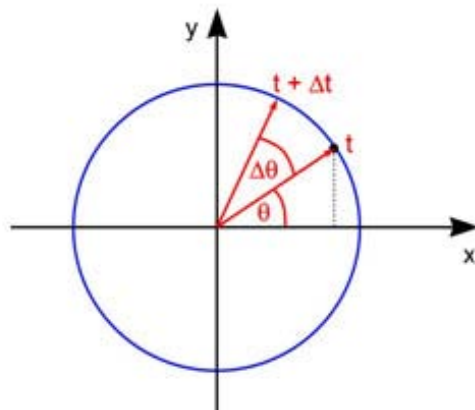
Por lo tanto, el proyectil humano pasa 5,3 m por arriba de la primera rueda de la fortuna

¿A qué distancia deben colocar la red?

$$R = \frac{2v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{g}$$

$$R = \frac{2(26,5 \text{ m/s})^2 \sin(53^\circ) \cos(53^\circ)}{9,8 \text{ m/s}^2} = 69 \text{ m}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR



LA PARTÍCULA SE
MUEVE SOBRE UNA
CIRCUNFERENCIA

=> BASTA UN ÁNGULO
PARA DESCRIBIR SU
POSICIÓN

$$\text{VELOCIDAD ANGULAR} = \omega \equiv \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

SI EL MOVIMIENTO ES CIRCULAR UNIFORME

$$\Rightarrow \omega = \text{cte} = \frac{2\pi}{T}$$

DONDE T ES EL PERÍODO

UNIDADES

$$\omega = \left[\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right] = \left[\frac{\text{radianes}}{\text{s}} \right] = \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$$

$$T = [\text{s}]$$

$$f = \text{frecuencia} \equiv \frac{1}{T} = \left[\frac{1}{\text{s}} \right] \equiv [\text{Hz}]$$

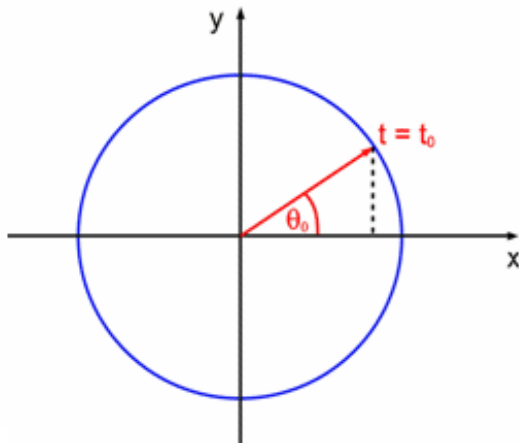
↑
Hertz

ANALOGÍA CON EL MOVIMIENTO 1-DIM

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)}$$

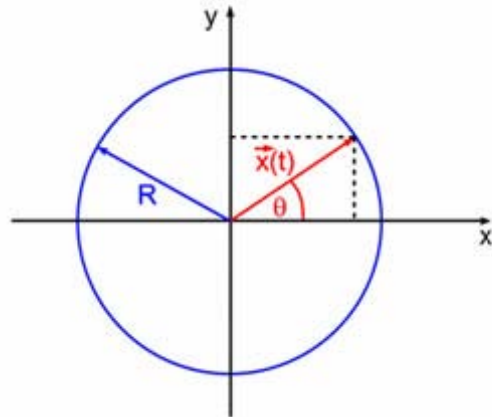
θ_0 : POSICIÓN DE LA PARTÍCULA EN $t = t_0$



Si $t_0 = \theta_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \omega t}$$

DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO EN COORDENADAS CARTESIANAS

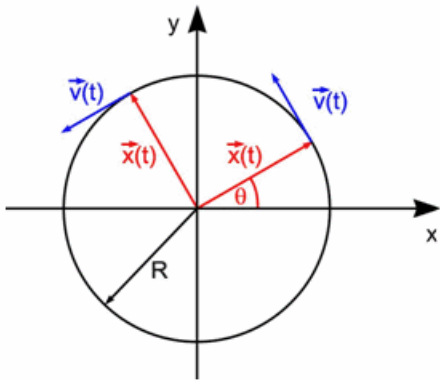


COORD. X : $x = R \cos \theta = R \cos \omega t$

COORD. Y : $y = R \sin \theta = R \sin \omega t$

$\therefore \vec{x}(t) = R (\cos \omega t, \sin \omega t)$

VELOCIDAD

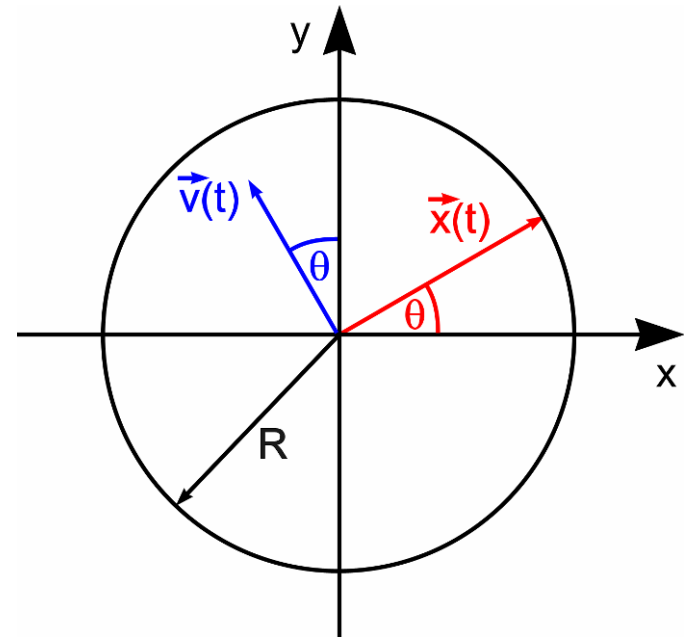


$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

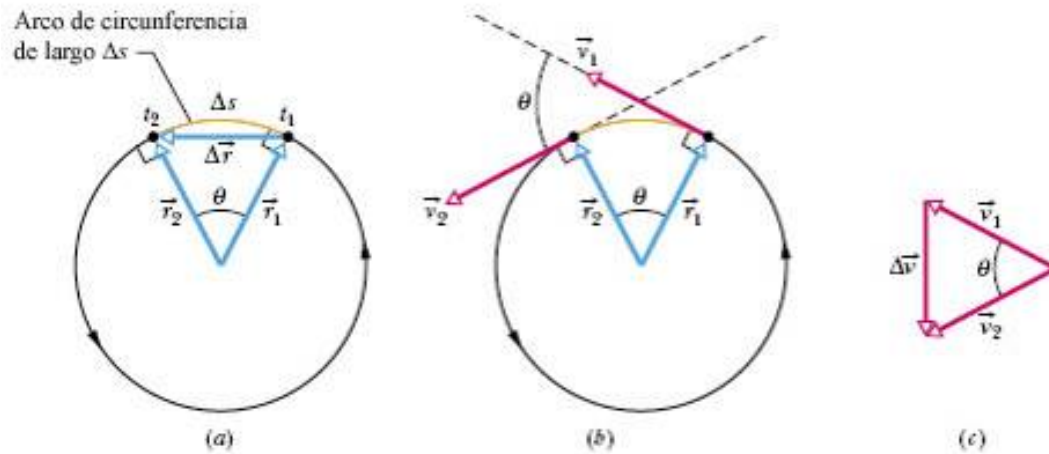
$\vec{v}(t) = R\omega (-\sin\omega t, \cos\omega t)$ \vec{v} ES SIEMPRE
TANGENTE A LA
CIRCUNFERENCIA

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t + R^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$|\vec{v}| = R\omega$$



Aceleración



Los triángulos en (a) y (c) son similares y se cumple

$$\text{sen } \theta = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

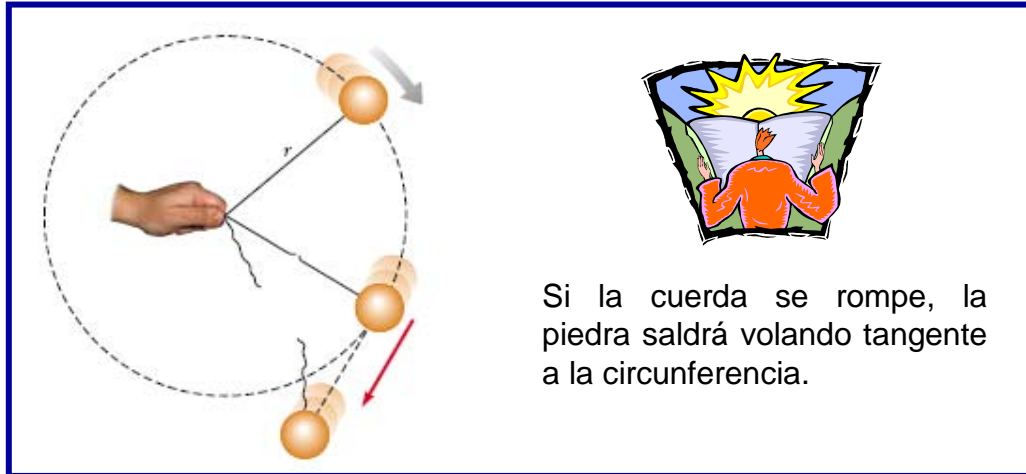
La aceleración de la partícula está dada por

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t} \approx \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

SI NO EXISTIERA UNA ACELERACIÓN LA
PARTÍCULA SEGUIRÍA POR LA TANGENTE
A LA CIRCUNFERENCIA (PRINCIPIO DE INERCIA)

LA ACELERACIÓN LA "EMPUJA" HACIA EL
CENTRO

=> EXISTE UNA FUERZA QUE
MANTIENE A LA PARTÍCULA EN
SU TRAYECTORIA CIRCULAR

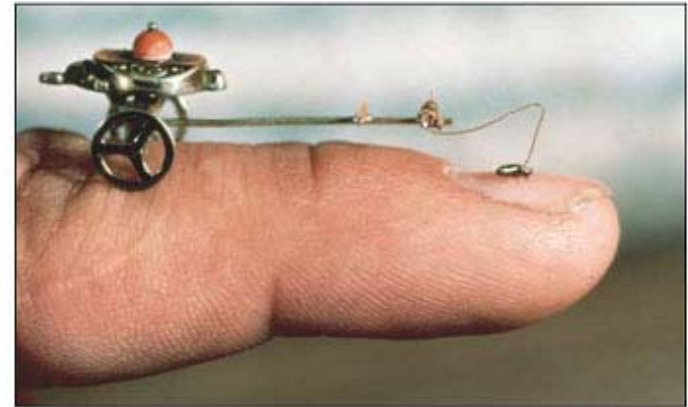


Dinámica

En 1997, María Fernanda Cardoso, una artista colombiana, creó un circo de pulgas entrenadas. Cardoso amarró un alambre delgado a Brutus, “la pulga más fuerte sobre la Tierra”, y la entrenó para que tirara un carrito. Luego, ella usó sonido y dióxido de carbono para conseguir que Brutus saltara. Videos muestran que cuando Brutus saltaba, el carrito se movía una distancia de 1 centímetro aprox. Está es una distancia asombrosa porque la masa del carrito era 160.000 veces mayor que la de la pulga.



¿Cómo es posible que una pulga tire un carro que tiene más de 160.000 veces su masa?



DINÁMICA

CINEMÁTICA = DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO

DINÁMICA = PREDICCIÓN DEL MOVIMIENTO

NEWTON "PHILOSOPHIAE NATURALIS
(1642-1727) PRINCIPIA MATHEMATICA"
(1686)

DEFINICIÓN I

MASA ES UNA MEDIDA DE LA CANTIDAD
DE MATERIA DE UN CUERPO

MASA ES UNA MEDIDA DE LA INERCIA
DE UN OBJETO

LA MASA ES PROPORCIONAL AL PESO



Isaac Newton (1642-1727)

DEFINICIÓN II

$$\underbrace{\text{CANTIDAD DE MOVIMIENTO}}_{\text{MOMENTUM}} = \underbrace{m \vec{v}}_{\vec{p}}$$

Si $m = \text{cte}$, EL MOMENTUM CAMBIA SI LA VELOCIDAD \vec{v} CAMBIA DE DIRECCIÓN Y/O MAGNITUD

EL MOMENTUM TAMBIÉN CAMBIA SI LA MASA m VARIA. EJEMPLO: COHETE

DEFINICIÓN III

LA FUERZA DE INERCIA ES LA FUERZA QUE OPONE UN CUERPO A VARIAR SU ESTADO PRESENTE, YA SEA DE REPOSO O DE MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

ESTA FUERZA ES PROPORCIONAL A LA MASA DEL OBJETO

DEFINICIÓN IV

UNA FUERZA APLICADA ES UNA ACCIÓN EJERCIDA SOBRE UN CUERPO A FIN DE CAMBIAR SU ESTADO

ESTA FUERZA ES UNA ACCIÓN SOLAMENTE Y NO PERMANECE EN EL CUERPO DESPUÉS DE TERMINADA LA ACCIÓN

EL CUERPO MANTIENE SU NUEVO ESTADO SÓLO POR SU **INERCI**A PERO LAS FUERZAS APLICADAS SON DE ORIGEN DIFERENTE

LEYES DE NEWTON

PRIMERA LEY (PRINCIPIO DE INERCIA)

UN CUERPO PERMANECE EN REPOSO
O EN MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME
A MENOS QUE SEA FORZADO A CAMBIAR
DE ESTADO POR LAS FUERZAS QUE
ACTÚAN SOBRE ÉL

UN CUERPO PERSISTE EN SU ESTADO DE
REPOSO O MOV. RECTILÍNEO UNIFORME
SÓLO SI LA SUMA DE LAS FUERZAS QUE
ACTÚAN SOBRE ÉL SE ANULAN ENTRE SÍ

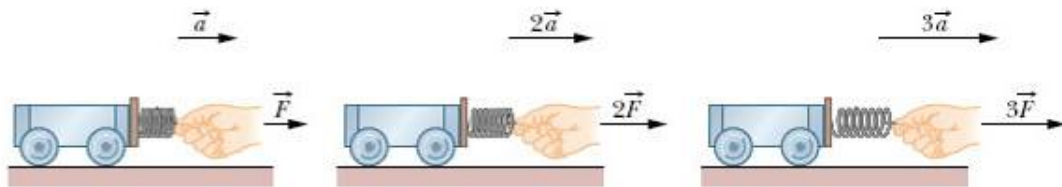
PRIMERA LEY \equiv LEY DE INERCIA \Rightarrow DEFINICIÓN
DE SISTEMAS INERCIALES

SEGUNDA LEY

EL CAMBIO DE MOMENTUM DE UNA PARTÍCULA ES PROPORCIONAL A LA FUERZA NETA QUE ACTÚA SOBRE ELLA Y APUNTA EN LA DIRECCIÓN DE LA LÍNEA GENERADA POR ESTA FUERZA NETA

$$\vec{F}_{\text{neto}} \equiv \sum_{k=1}^N \vec{F}_k = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{\text{neto}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



$$\text{Si } m = \text{cte} \Rightarrow \vec{F}_{\text{net}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

LA SEGUNDA LEY ES UNA PRESCRIPCIÓN DE
COMO PREDECIR EL MOVIMIENTO PERO
TODAVIA NO SABEMOS COMO EVALUAR
LA FUERZA NETA

$$\text{Si } \vec{F}_{\text{net}} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{cte}$$

TERCERA LEY (ACCIÓN - REACCIÓN)

CUANDO UN OBJETO EJERCE UNA FUERZA SOBRE OTRO, ESTE ÚLTIMO EJERCE UNA FUERZA IGUAL EN MAGNITUD Y OPUESTA EN SENTIDO SOBRE EL PRIMERO

¡LAS FUERZAS DE ACCIÓN Y REACCIÓN ACTÚAN SOBRE CUERPOS DISTINTOS!

UNIDADES

$$1 \text{ NEWTON} = 1 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$$

1N ES LA FUERZA QUE SE DEBE APLICAR A UN CUERPO DE 1 Kg DE MASA PARA TRANSMITIRLE UNA ACELERACIÓN DE 1 m/s^2

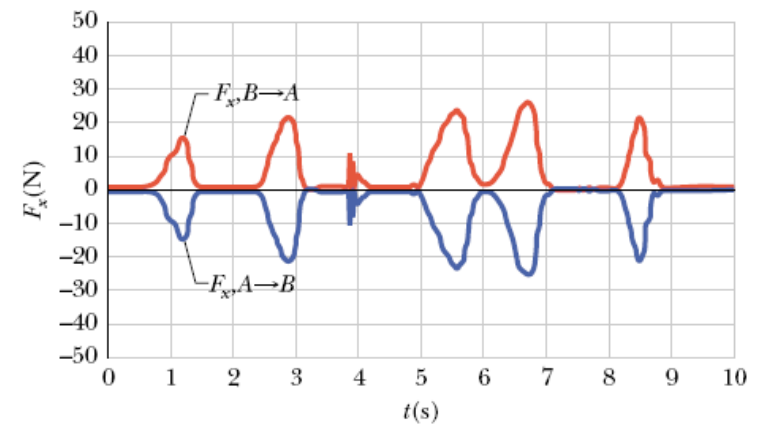
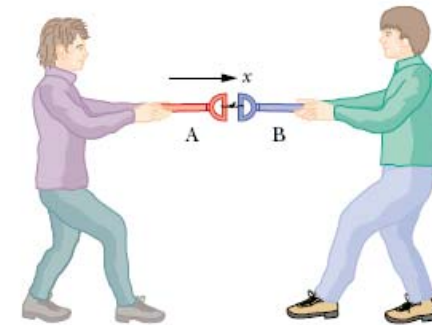
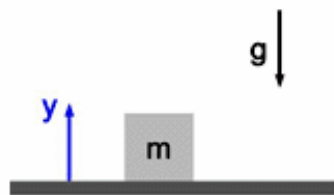


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (DCL)

- 1^{er} PASO : AISLAR CADA UNO DE
LOS CUERPOS
- 2^{do} PASO : DIBUJAR TODAS LAS FUERZAS
Y REACCIONES INVOLUCRADAS
- 3^{er} PASO : APLICAR LA 2ª LEY DE NEWTON

EJEMPLOS

①



DCL



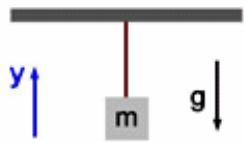
\Rightarrow

2ª ley de Newton
 $N - mg = 0$

$N = mg$

REACCIÓN DEL PISO

②



DCL



\Rightarrow

$T - mg = 0$

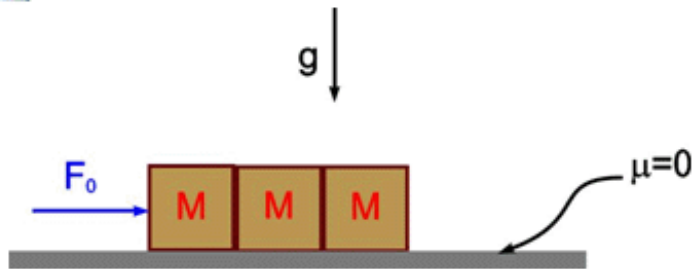
$T = mg$

TENSIÓN DE LA CUERDA

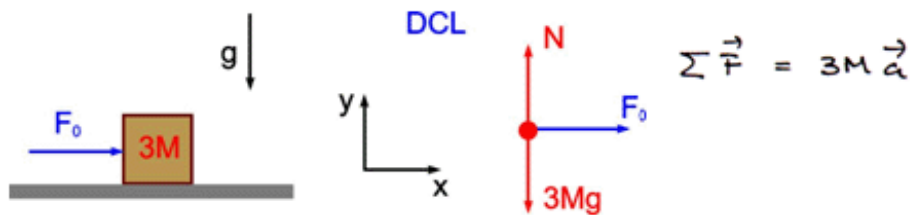
DCL DE LA CUERDA



EJEMPLO



DCL DE LA 3 MASAS



$$\sum \vec{F} = 3M \vec{a}$$

Eje x :

$$F_0 = 3M a_x$$

\Rightarrow

$$a_x = \frac{F_0}{3M}$$

Eje y :

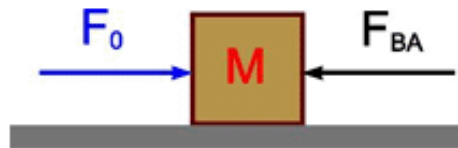
$$N - 3Mg = 0$$

\Rightarrow

$$N = 3Mg$$

TODAS LAS MASAS SE MUEVEN CON LA MISMA
ACELERACION $a_x = \frac{F_0}{3M}$

3CL MASA A



F_{BA} = FUERZA DE
CONTACTO DE B.
SOBRE A

(2ª LEY)

$$F_0 - F_{BA} = M a_x$$

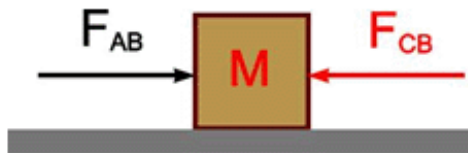
ES LA ACELERACIÓN
DEL CONJUNTO

$$a_x = \frac{F_0}{3M}$$

$$F_0 - F_{BA} = M \frac{F_0}{3M}$$

$$F_{BA} = \frac{2}{3} F_0$$

DCL MASA B



F_{CB} = FUERZA DE CONTACTO
DE C SOBRE B

$$|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}| \quad \text{POR 3ª LEY}$$

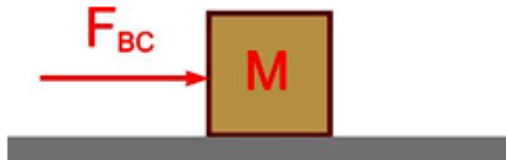
ENTONCES

$$F_{AB} - F_{CB} = M \left(\frac{F_0}{3M} \right)$$

$$\frac{2}{3} F_0 - F_{CB} = \frac{F_0}{3}$$

$$F_{CB} = \frac{F_0}{3}$$

DCL MASA C



$$3^{\text{a}} \text{ LEY} \Rightarrow |\vec{F}_{BC}| = |\vec{F}_{CB}|$$

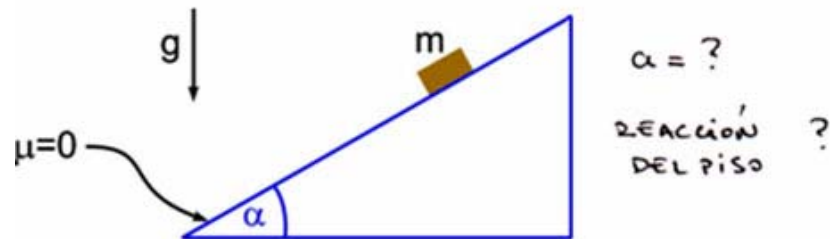
ENTONCES

$$\vec{F}_{BC} = M a$$

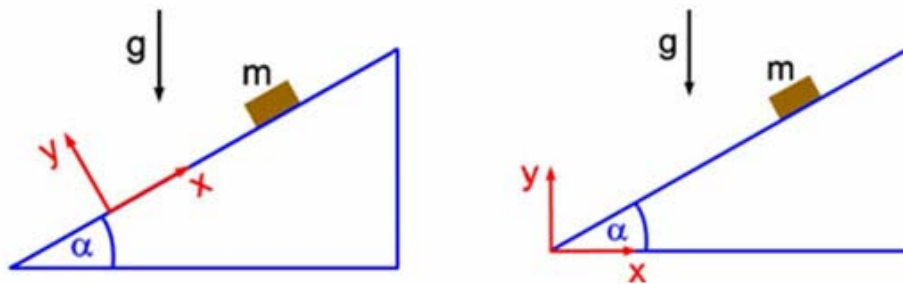
$$\vec{F}_{BC} = M \left(\frac{F_0}{3M} \right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{BC} = \frac{F_0}{3}}$$

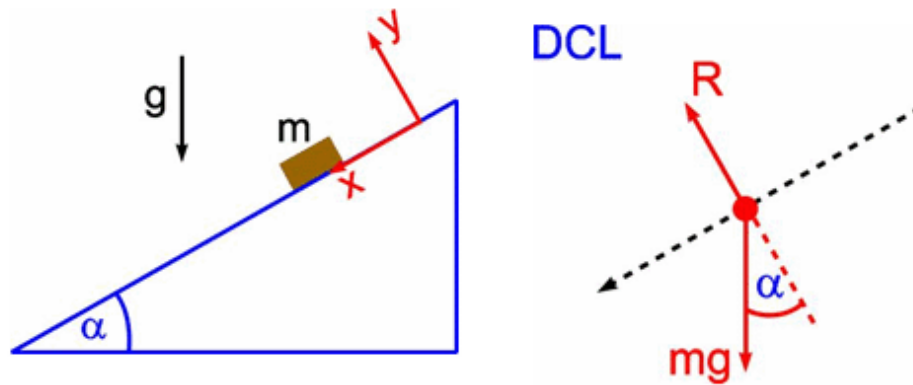
PLANO INCLINADO



SOL



POSIBLES SISTEMAS DE REFERENCIA



2ª LEY

Eje x :

$$Mg \sen \alpha = M a_x$$

$$a_x = g \sen \alpha$$

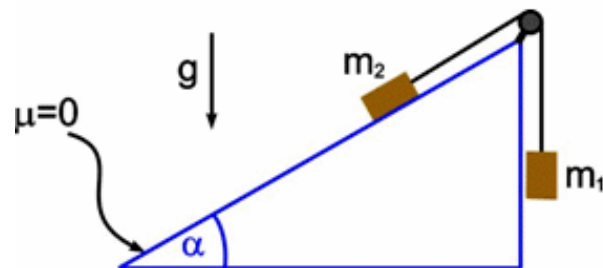
Eje y :

$$R - Mg \cos \alpha = 0$$

$$R = Mg \cos \alpha$$

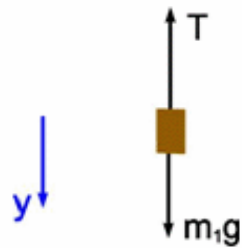
NO HAY
ACELERACIÓN
EJE y

POLEA + PLANO INCLINADO



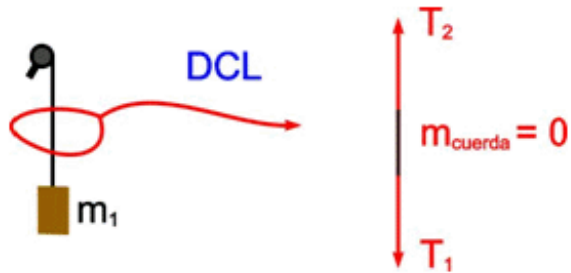
$a = ?$
TENSION ?
VERDA

DCL m_1



$$m_1g - T = m_1a \quad (1)$$

ANALICEMOS QUÉ SUCEDE EN LA CUERDA

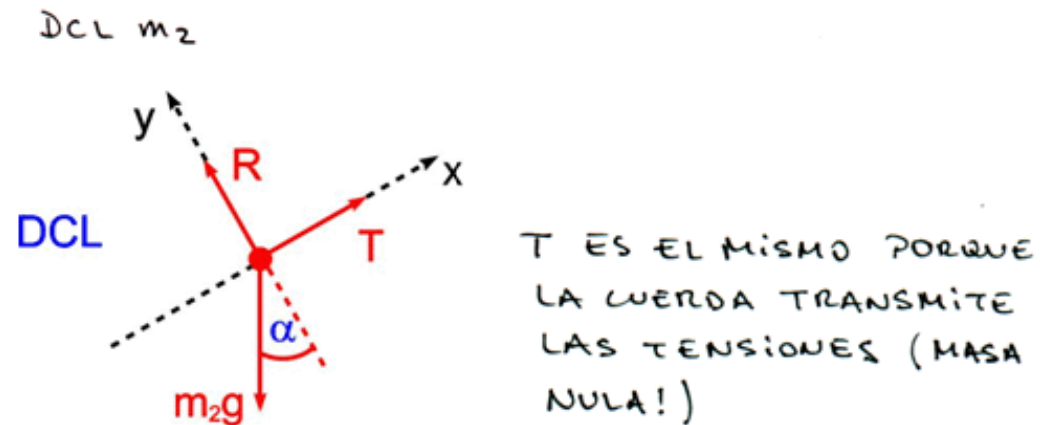


2ª LEY:

$$T_2 - T_1 = \cancel{m_{\text{cuerda}}} \cdot a \rightarrow 0$$

$$\therefore T_1 = T_2$$

UNA CUERDA IDEAL CON MASA NULA O MEJOR
DICHLO DESPRECIABLE FRENTE A LOS VALORES
DE LAS OTRAS MASAS TRANSMITE LAS
TENSIONES EN TODA SU MAGNITUD



CUERDA IDEAL \Rightarrow INEXTENSIBLE

\Rightarrow ACELERACIÓN ES LA MISMA
PARA AMBAS MASAS

Eje x: $T - m_2 g \sen \alpha = m_2 a \quad (2)$

Eje y: $R - m_2 g \cos \alpha = 0$

DE (1) SE TIENE

$$T = m_1 (g - a) \quad (3)$$

REEMPLAZANDO EN (2)

$$m_1 (g - a) - m_2 g \sin \alpha = m_2 a$$

$$g(m_1 - m_2 \sin \alpha) = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha) g}{m_1 + m_2}$$

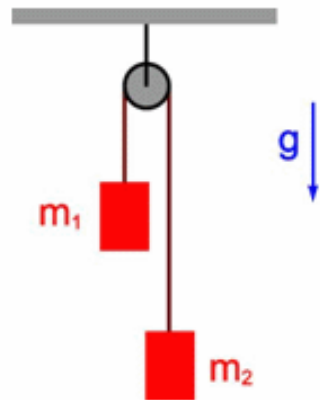
REEMPLAZANDO EN (3)

$$T = m_1 g \left[1 - \frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha)}{m_1 + m_2} \right]$$

$$T = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} \left[\cancel{m_1} + m_2 - \cancel{m_1} + m_2 \sin \alpha \right]$$

$$T = \frac{m_1 m_2 (1 + \sin \alpha) g}{m_1 + m_2}$$

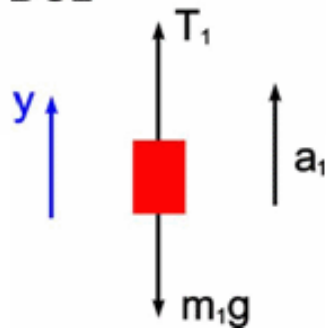
MÁQUINA DE ATWOOD



POLEA IDEAL \Rightarrow MASA = 0
SIN ROCE

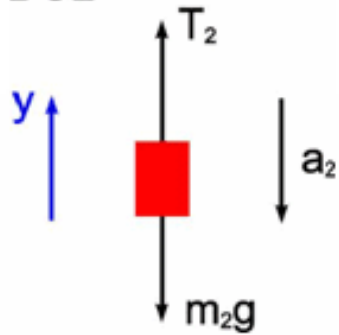
\Rightarrow SOLO CAMBIA LA
DIRECCIÓN DE LA
TENSION DE LA CUERDA

DCL



$$T_1 - m_1g = m_1a_1$$

DCL



$$T_2 - m_2 g = -m_2 a_2$$

CUERDA IDEAL + POLEA IDEAL

$$\Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T$$

$$a_1 = a_2 = a$$

ENTONCES

$$T - m_1 g = m_1 a$$

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

RESTANDO ESTAS ECUACIONES

$$-m_1 g + m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$(m_2 - m_1) g = a (m_1 + m_2)$$

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$

POR LO TANTO

$$T = m_1 g + m_1 a$$

$$T = m_1 g \left[1 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right]$$

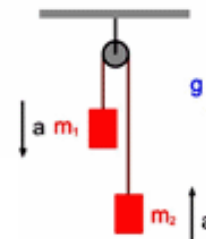
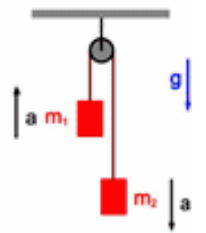
$$T = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} [m_2 + \cancel{m_1} + m_2 - \cancel{m_1}]$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

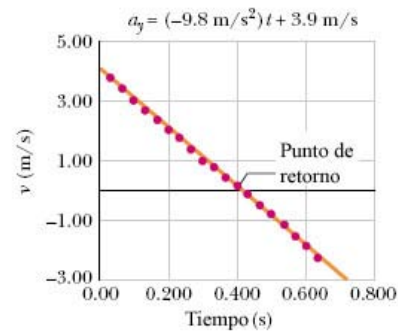
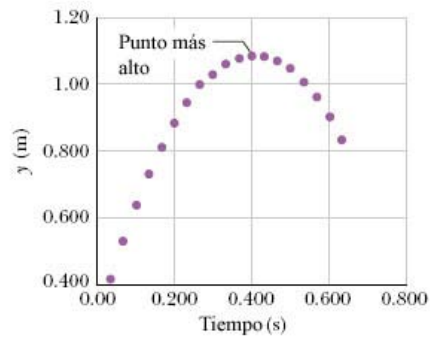
CASOS :

$$m_2 > m_1 \Rightarrow a > 0$$

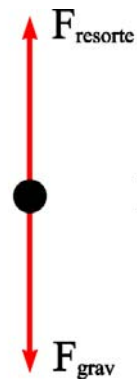
$$m_2 < m_1 \Rightarrow a < 0$$



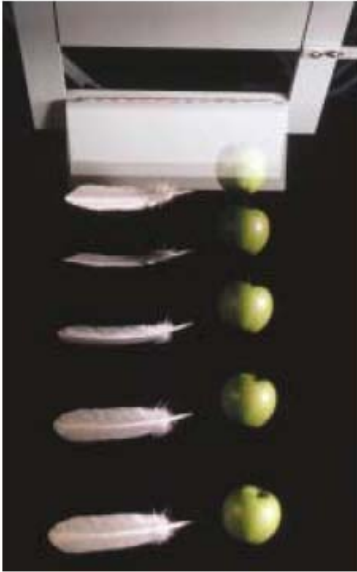
Fuerza gravitacional y Peso



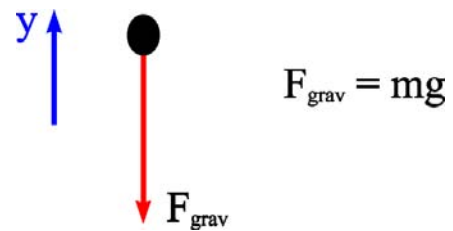
Una pelota de masa m es lanzada cerca de la superficie de la Tierra, ¿cuál es su aceleración?



$$F_{\text{resorte}} - F_{\text{grav}} = 0$$

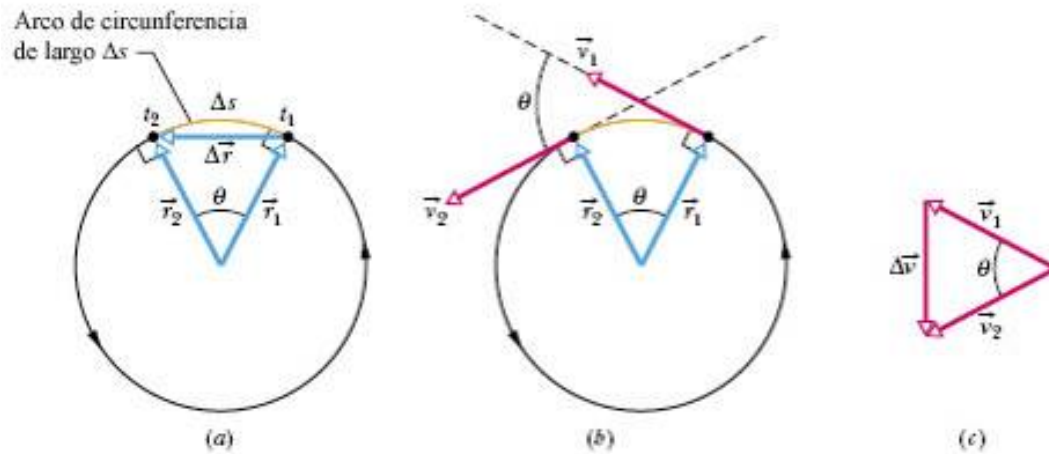


En el vacío una pluma y una manzana en caída libre experimentan la misma aceleración.



$$\text{Peso} = W = |F_{\text{grav}}| = mg$$

Segunda Ley de Newton y Movimiento Circular Uniforme

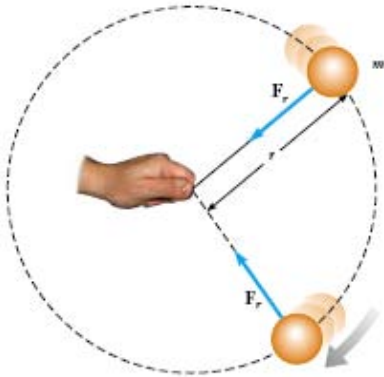


Los triángulos en (a) y (c) son similares y se cumple

$$\text{sen } \theta = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

La aceleración de la partícula está dada por

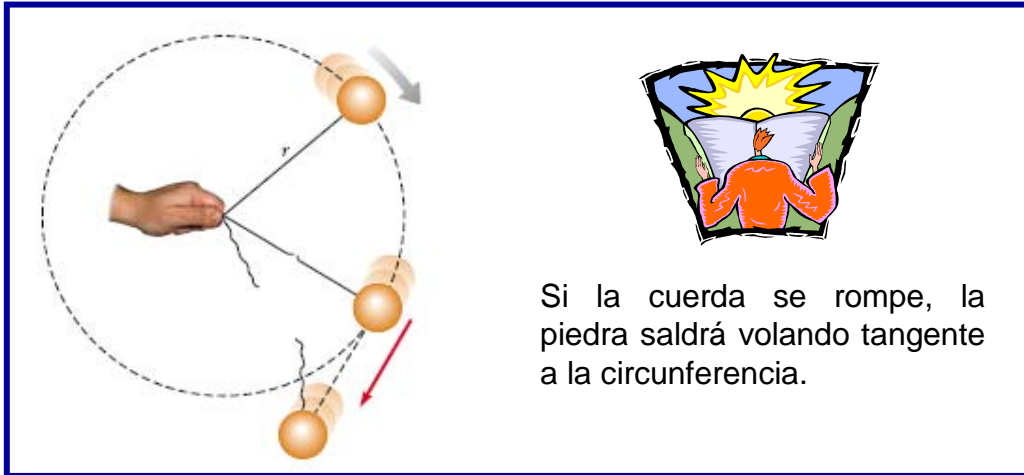
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t} \approx \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$



Aplicando la Segunda Ley de Newton

$$F_r = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

F_r es la fuerza causante de la aceleración



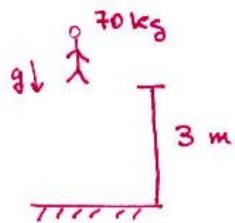
Si la cuerda se rompe, la piedra saldrá volando tangente a la circunferencia.

IMPULSO



$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \underbrace{\vec{F} \Delta t}_{\text{IMPULSO}} = \Delta \vec{p}$$

EJEMPLO



¿ FUERZA PROMEDIO SOBRE LOS PIES ?

¿ QUÉ PASA SI FLECTA LAS
PIERNAS ?

Velocidad al llegar al suelo

$$v = \sqrt{2gh} = 7.7 \text{ m/s}$$

$$\text{IMPULSO} = \bar{F} \Delta t = \Delta p = -mv = -540 \text{ N}\cdot\text{s}$$

$$\bar{v} = \frac{(7.7 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s})}{2} = 3.8 \text{ m/s}$$

LA COLISIÓN DURA $\Delta t = \frac{d}{\bar{v}} \approx \frac{1 \text{ cm}}{3.8 \text{ m/s}} = 2.6 \times 10^{-3} \text{ s}$

$$\Rightarrow \bar{F} = \frac{-540 \text{ N}\cdot\text{s}}{2.6 \times 10^{-3} \text{ s}} = 2.1 \times 10^5 \text{ N}$$

DCL



$$\bar{F} = F_{\text{suelo}} - \underbrace{mg}_{690 \text{ N}}$$

$$\Rightarrow F_{\text{suelo}} \approx 2.1 \times 10^5 \text{ N}$$

ESTA FUERZA PUEDE
ROMPERLE LAS PIERNAS!

SI LA PERSONA FLETA LAS PIERNAS 50 cm SE
TIENE QUE EL TIEMPO QUE DURA LA COLISIÓN ES

$$\Delta t = \frac{50 \text{ cm}}{3.8 \text{ m/s}} = 0.13 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{F} = \frac{540 \text{ N}\cdot\text{s}}{0.13 \text{ s}} = 4.2 \times 10^3 \text{ N}$$

LA FUERZA QUE EJERCE EL SUELO SERÁ

$$F_{\text{SUELO}} = \overline{F} + mg = 4.9 \times 10^3 \text{ N}$$