

## Movimiento en dos dimensiones

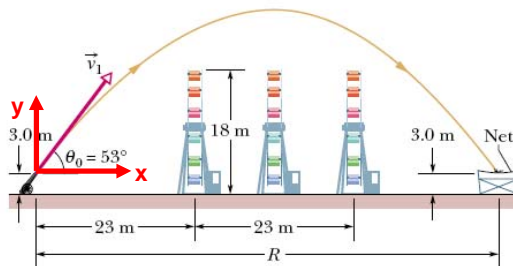
En 1922, uno de los Zacchinis, una famosa familia de circenses italianos, fue la primera “bala humana” disparada por un cañón. Para aumentar la espectacularidad del acto, la familia aumento gradualmente la distancia del vuelo, hasta que, en 1940, Emanuel Zacchini voló sobre tres ruedas de la fortuna, atravesando una distancia horizontal de 69 m.



¿Cómo pudo saber donde colocar la red y cómo pudo estar seguro que alcanzaría altura suficiente para no golpear las ruedas de la fortuna?



92



Condiciones iniciales  
 $x_1 = y_1 = 0$   
 $v_1 = 26,5 \text{ m/s}$   
 $\theta_1 = 53^\circ$

Ecuaciones de movimiento  
 $x = v_1 \cos \theta_1 t$   
 $y = v_1 \sin \theta_1 t - \frac{1}{2} g t^2$

¿Pasa por arriba de la primera rueda de la fortuna?

$$t_2 = \frac{x_2}{v_1 \cos \theta_1} \Rightarrow y_2 = v_1 \sin \theta_1 \left( \frac{x_2}{v_1 \cos \theta_1} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{x_2}{v_1 \cos \theta_1} \right)^2$$

Evaluyendo

$$y_2 = (\tan 53^\circ)(23 \text{ m}) - \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(23 \text{ m})^2}{2(26,5 \text{ m/s})^2 (\cos 53^\circ)^2}$$

$$y_2 = 20,3 \text{ m}$$

Por lo tanto, el proyectil humano pasa 5,3 m por arriba de la primera rueda de la fortuna

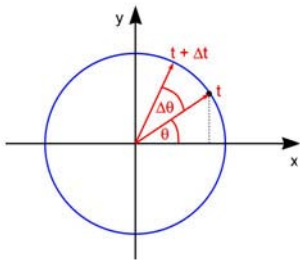
¿A qué distancia deben colocar la red?

$$R = \frac{2v_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{g}$$

$$R = \frac{2(26,5 \text{ m/s})^2 \sin(53^\circ) \cos(53^\circ)}{9,8 \text{ m/s}^2} = 69 \text{ m}$$

93

### MOVIMIENTO CIRCULAR



LA PARTÍCULA SE  
MUEVE SOBRE UNA  
CIRCUNFERENCIA

=> BASTA UN ÁNGULO  
PARA DESCRIBIR SU  
POSICIÓN

$$\text{VELOCIDAD ANGULAR} = \omega \equiv \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Si EL MOVIMIENTO ES CIRCULAR UNIFORME

$$\Rightarrow \omega = \text{cte} = \frac{2\pi}{T}$$

Donde T es el PERÍODO

### UNIDADES

$$\omega = \left[ \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right] = \left[ \frac{\text{radianes}}{\text{s}} \right] = \left[ \frac{1}{\text{s}} \right]$$

$$T = [\text{s}]$$

$$f = \text{frecuencia} \equiv \frac{1}{T} = \left[ \frac{1}{\text{s}} \right] \equiv [\text{Hz}]$$

↑  
Hertz

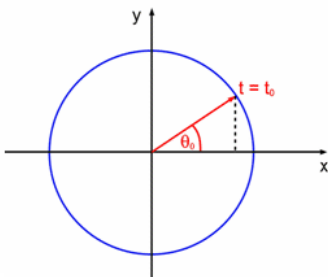
94

### ANALOGÍA CON EL MOVIMIENTO 1-DIM

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)}$$

$\theta_0$ : POSICIÓN DE LA PARTÍCULA EN  $t = t_0$

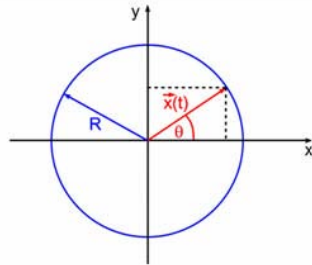


Si  $t_0 = \theta_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \omega t}$$

95

# DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO EN COORDENADAS CARTESIANAS



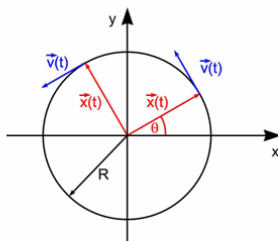
COORD. X :  $x = R \cos \theta = R \cos \omega t$

COORD. Y :  $y = R \sin \theta = R \sin \omega t$

$\therefore \vec{r}(t) = R (\cos \omega t, \sin \omega t)$

96

## VELOCIDAD

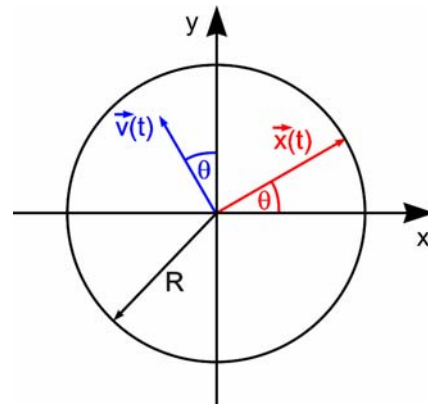


$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{v}(t) = R\omega (-\sin \omega t, \cos \omega t)$   $\vec{v}$  ES SIEMPRE TANGENTE A LA CIRCUNFERENCIA

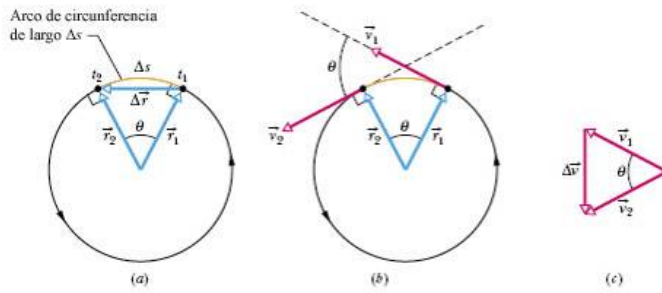
$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2 \omega t + R^2\omega^2 \cos^2 \omega t}$$

$$|\vec{v}| = R\omega$$



97

## Aceleración



Los triángulos en (a) y (c) son similares y se cumple

$$\text{sen } \theta = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

La aceleración de la partícula está dada por

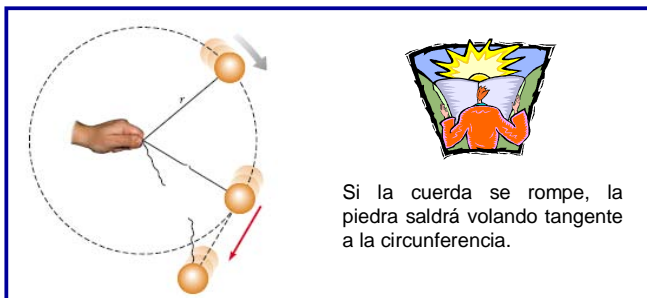
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t} \approx \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

98

SI NO EXISTIERA UNA ACELERACIÓN LA PARTÍCULA SEGUIRÍA POR LA TANGENTE A LA CIRCUNFERENCIA (PRINCIPIO DE INERCIA)

LA ACELERACIÓN LA "EMPUJA" HACIA EL CENTRO

⇒ EXISTE UNA FUERZA QUE MANTIENE A LA PARTÍCULA EN SU TRAYECTORIA CIRCULAR



Si la cuerda se rompe, la piedra saldrá volando tangente a la circunferencia.

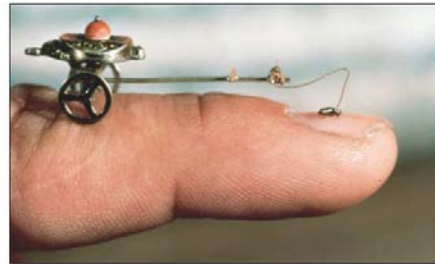
99

## Dinámica

En 1997, María Fernanda Cardoso, una artista colombiana, creó un circo de pulgas entrenadas. Cardoso amarró un alambre delgado a Brutus, "la pulga más fuerte sobre la Tierra", y la entrenó para que tirara un carrito. Luego, ella usó sonido y dióxido de carbono para conseguir que Brutus saltara. Videos muestran que cuando Brutus saltaba, el carrito se movía una distancia de 1 centímetro aprox. Está es una distancia asombrosa porque la masa del carrito era 160.000 veces mayor que la de la pulga.



¿Cómo es posible que una pulga tire un carro que tiene más de 160.000 veces su masa?



100

## DINÁMICA

CINEMÁTICA = DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO

DINÁMICA = PREDICCIÓN DEL MOVIMIENTO

NEWTON "PHILOSOPHIAE NATURALIS  
(1642-1727) PRINCIPIA MATHEMATICA"  
(1686)

DEFINICIÓN I

MASA ES UNA MEDIDA DE LA CANTIDAD  
DE MATERIA DE UN CUERPO

MASA ES UNA MEDIDA DE LA INERCIA  
DE UN OBJETO

LA MASA ES PROPORCIONAL AL PESO



Isaac Newton (1642-1727)

101

## DEFINICIÓN II

$$\underbrace{\text{CANTIDAD DE MOVIMIENTO}}_{\text{MOMENTUM}} = \underbrace{m \vec{v}}_{\vec{p}}$$

Si  $m = \text{cte}$ , EL MOMENTUM CAMBIA SI LA VELOCIDAD  $\vec{v}$  CAMBIA DE DIRECCIÓN Y/O MAGNITUD

EL MOMENTUM TAMBIÉN CAMBIA SI LA MASA  $m$  VARIA. EJEMPLO: COHETE

## DEFINICIÓN III

LA FUERZA DE INERCIA ES LA FUERZA QUE OPONE UN CUERPO A VARIAR SU ESTADO PRESENTE, YA SEA DE REPOSO O DE MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

ESTA FUERZA ES PROPORCIONAL A LA MASA DEL OBJETO

#### DEFINICIÓN IV

UNA FUERZA APLICADA ES UNA ACCIÓN EJERCIDA SOBRE UN CUERPO A FIN DE CAMBIAR SU ESTADO

ESTA FUERZA ES UNA ACCIÓN SOLAMENTE Y NO PERMANECE EN EL CUERPO DESPUÉS DE TERMINADA LA ACCIÓN

EL CUERPO MANTIENE SU NUEVO ESTADO SÓLO POR SU **INERCI**A PERO LAS FUERZAS APLICADAS SON DE ORIGEN DIFERENTE

104

#### LEYES DE NEWTON

##### PRIMERA LEY (PRINCIPIO DE INERCI

UN CUERPO PERMANECE EN REPOSO O EN MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME A MENOS QUE SEA FORZADO A CAMBIAR DE ESTADO POR LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE ÉL

UN CUERPO PERSISTE EN SU ESTADO DE REPOSO O MOV. RECTILÍNEO UNIFORME SOLO SI LA SUMA DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE ÉL SE ANULAN ENTRE SÍ

PRIMERA LEY  $\equiv$  LEY DE INERCI

$\Rightarrow$  DEFINICIÓN DE SISTEMAS INERCIALES

105

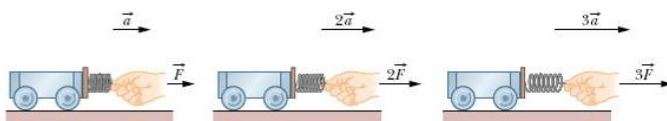
## SEGUNDA LEY

EL CAMBIO DE MOMENTUM DE UNA PARTÍCULA ES PROPORCIONAL A LA FUERZA NETA QUE ACTÚA SOBRE ELLA Y APUNTA EN LA DIRECCIÓN DE LA LÍNEA GENERADA POR ESTA FUERZA NETA

$$\vec{F}_{\text{net}} \equiv \sum_{k=1}^N \vec{F}_k = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

106



Si  $m = \text{cte} \Rightarrow \vec{F}_{\text{net}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

LA SEGUNDA LEY ES UNA PRESCRIPCIÓN DE COMO PREDECIR EL MOVIMIENTO PERO TODAVIA NO SABEMOS COMO EVALUAR LA FUERZA NETA

Si  $\vec{F}_{\text{net}} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{cte}$

107



### TERCERA LEY (ACCIÓN - REACCIÓN)

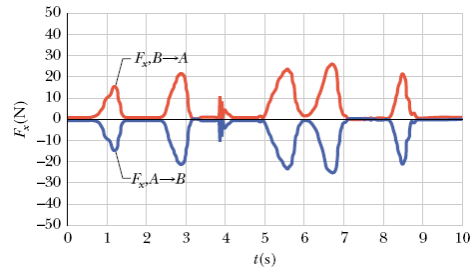
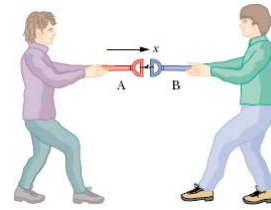
CUANDO UN OBJETO EJERCE UNA FUERZA SOBRE OTRO, ESTE ÚLTIMO EJERCE UNA FUERZA IGUAL EN MAGNITUD Y OPUESTA EN SENTIDO SOBRE EL PRIMERO

¡LAS FUERZAS DE ACCIÓN Y REACCIÓN ACTÚAN SOBRE CUERPOS DISTINTOS!

### UNIDADES

$$1 \text{ NEWTON} = 1 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$$

1 N ES LA FUERZA QUE SE DEBE APLICAR A UN CUERPO DE 1 kg DE MASA PARA TRANSMITIRLE UNA ACELERACIÓN DE  $1 \text{ m/s}^2$



108

### DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (DCL)

1er PASO : AISLAR CADA UNO DE LOS CUERPOS

2do PASO : DIBUJAR TODAS LAS FUERZAS Y REACCIONES INVOLUCRADAS

3er PASO : APLICAR LA 2ª LEY DE NEWTON

109

EJEMPLOS

①

2ª ley de Newton

DCL

$N - mg = 0$

$\Rightarrow$   $N = mg$

REACCIÓN DEL PISO

②

DCL

$T - mg = 0$

$\Rightarrow$   $T = mg$

TENSIÓN DE LA CUERDA

DCL DE LA CUERDA

ACCIÓN Y REACCIÓN

110

EJEMPLO

$g$

$F_0$

$M$   $M$   $M$

$\mu=0$

DCL DE LA 3 MASAS

$F_0$

$g$

DCL

$N$

$F_0$

$3Mg$

$\Sigma \vec{F} = 3M \vec{a}$

Eje x:

$F_0 = 3M a_x \Rightarrow a_x = \frac{F_0}{3M}$

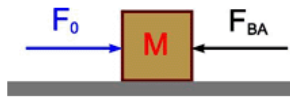
Eje y:

$N - 3Mg = 0 \Rightarrow N = 3Mg$

TODAS LAS MASAS SE MUEVEN CON LA MISMA ACELERACIÓN  $a_x = \frac{F_0}{3M}$

111

DCL MASA A



$F_{BA}$  = FUERZA DE CONTACTO DE B SOBRE A

(2ª LEY)

$$F_0 - F_{BA} = M a_x$$

ES LA ACCELERACIÓN DEL CONJUNTO

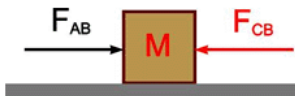
$$a_x = \frac{F_0}{3M}$$

$$F_0 - F_{BA} = M \frac{F_0}{3M}$$

$$F_{BA} = \frac{2}{3} F_0$$

112

DCL MASA B



$F_{CB}$  = FUERZA DE CONTACTO DE C SOBRE B

$$|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}| \text{ POR 3ª LEY}$$

ENTONCES

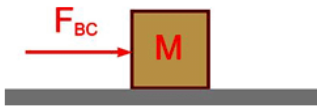
$$F_{AB} - F_{CB} = M \left( \frac{F_0}{3M} \right)$$

$$\frac{2}{3} F_0 - F_{CB} = \frac{F_0}{3}$$

$$F_{CB} = \frac{1}{3} F_0$$

113

DEL MASA C



$$3^{\text{a}} \text{ LEY} \Rightarrow |\vec{F}_{BC}| = |\vec{F}_{CB}|$$

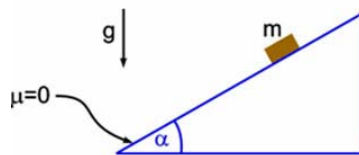
ENTONCES

$$\vec{F}_{BC} = M a$$

$$\vec{F}_{BC} = M \left( \frac{\vec{F}_0}{3M} \right)$$

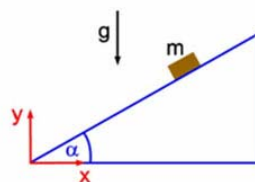
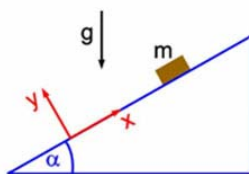
$$\vec{F}_{BC} = \frac{\vec{F}_0}{3}$$

PLANO INCLINADO



$\alpha = ?$   
REACCIÓN  
DEL PISO ?

SOL



POSIBLES SISTEMAS DE REFERENCIA

**DCL**

2ª LEY

Eje x :  $Mg \operatorname{sen} \alpha = M a_x$   
 $a_x = g \operatorname{sen} \alpha$

Eje y :  $R - Mg \cos \alpha = 0$  ← NO HAY ACELERACIÓN EJE Y  
 $R = Mg \cos \alpha$

116

POLEA + PLANO INCLINADO

$\mu=0$

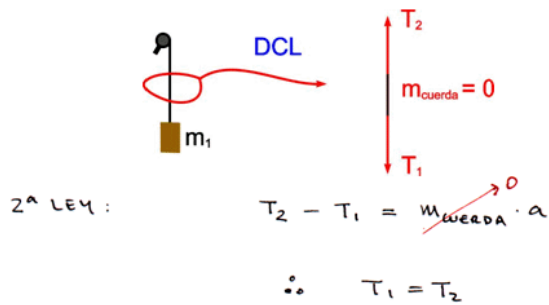
$a = ?$   
TENSION ?  
VERDA

DCL  $m_1$

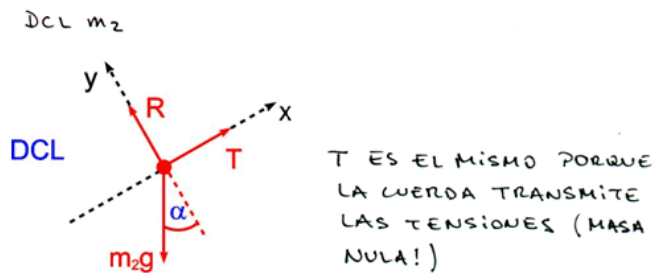
$m_1 g - T = m_1 a \quad (1)$

117

ANALICEMOS QUÉ SUCEDE EN LA CUERDA



UNA CUERDA IDEAL CON MASA NULA O MEJOR DICHO DESPRECIABLE FRENTE A LOS VALORES DE LAS OTRAS MASAS TRANSMITE LAS TENSIONES EN TODA SU MAGNITUD



CUERDA IDEAL  $\Rightarrow$  INEXTENSIBLE

$\Rightarrow$  ACELERACIÓN ES LA MISMA PARA AMBAS MASAS

Eje x:  $T - m_2 g \sin \alpha = m_2 a \quad (2)$

Eje y:  $R - m_2 g \cos \alpha = 0$

DE (1) SE TIENE

$$T = m_1(g - a) \quad (3)$$

REEMPLAZANDO EN (2)

$$m_1(g - a) - m_2 g \sin \alpha = m_2 a$$

$$g(m_1 - m_2 \sin \alpha) = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha) g}{m_1 + m_2}$$

REEMPLAZANDO EN (3)

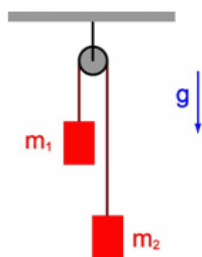
$$T = m_1 g \left[ 1 - \frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha)}{m_1 + m_2} \right]$$

$$T = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} \left[ \cancel{m_1} + m_2 - \cancel{m_1} + m_2 \sin \alpha \right]$$

$$T = \frac{m_1 m_2 (1 + \sin \alpha) g}{m_1 + m_2}$$

120

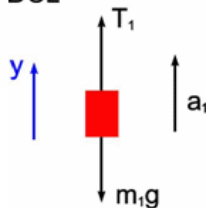
### MÁQUINA DE ATWOOD



POLEA IDEAL  $\Rightarrow$  MASA = 0  
SIN ROCE

$\Rightarrow$  SOLO CAMBIA LA  
DIRECCIÓN DE LA  
TENSIÓN DE LA CUERDA

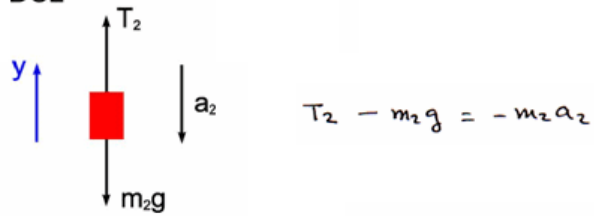
DCL



$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

124

DCL



CUERDA IDEAL + POLEA IDEAL

$$\Rightarrow T_1 = T_2 = T$$

$$a_1 = a_2 = a$$

ENTONCES

$$T - m_1 g = m_1 a$$

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

125

RESTANDO ESTAS ECUACIONES

$$-m_1 g + m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$(m_2 - m_1) g = a (m_1 + m_2)$$

$$a = \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$

POR LO TANTO

$$T = m_1 g + m_1 a$$

$$T = m_1 g \left[ 1 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right]$$

126



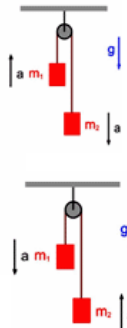
$$T = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} [m_2 + \cancel{m_1} + m_2 - \cancel{m_1}]$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

CASOS :

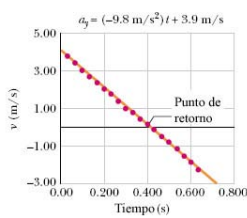
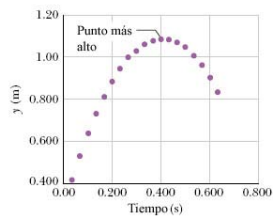
$$m_2 > m_1 \Rightarrow a > 0$$

$$m_2 < m_1 \Rightarrow a < 0$$

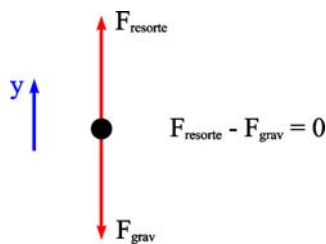


127

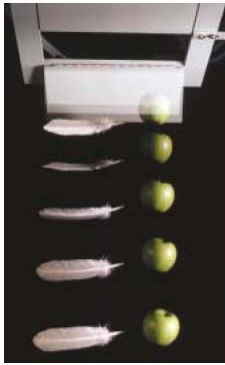
### Fuerza gravitacional y Peso



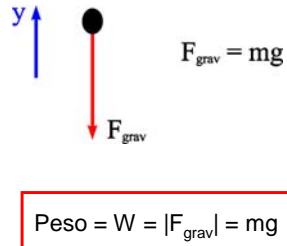
Una pelota de masa  $m$  es lanzada cerca de la superficie de la Tierra, ¿cuál es su aceleración?



128

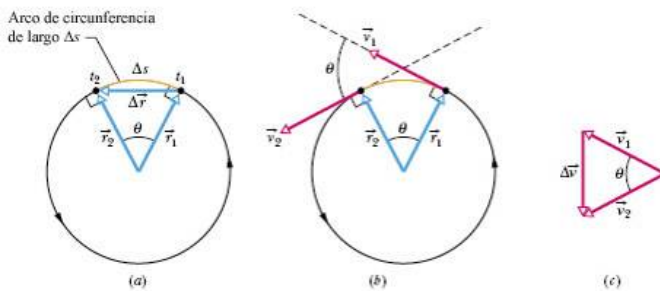


En el vacío una pluma y una manzana en caída libre experimentan la misma aceleración.



129

### Segunda Ley de Newton y Movimiento Circular Uniforme



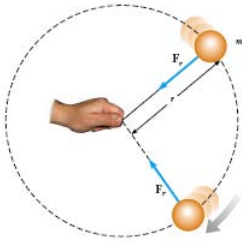
Los triángulos en (a) y (c) son similares y se cumple

$$\text{sen } \theta = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

La aceleración de la partícula está dada por

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t} \approx \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

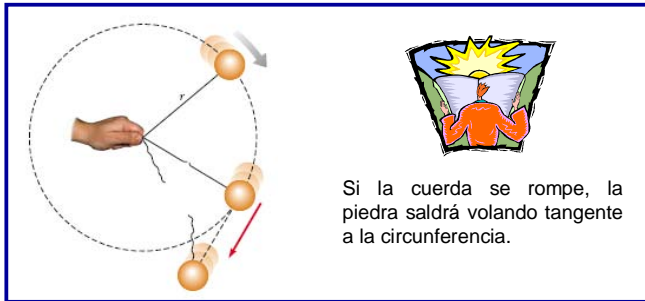
130



Aplicando la Segunda Ley de Newton

$$F_r = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

$F_r$  es la fuerza causante de la aceleración



Si la cuerda se rompe, la piedra saldrá volando tangente a la circunferencia.

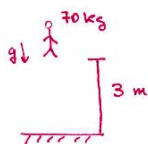
131

### IMPULSO



$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \underbrace{\vec{F} \Delta t}_{\text{IMPULSO}} = \Delta \vec{p}$$

### EJEMPLO



¿ FUERZA PROMEDIO SOBRE LOS PIES ?  
¿ QUÉ PASA SI FLETA LAS PIERNAS ?

132

Velocidad al llegar al suelo

$$v = \sqrt{2gh} = 7.7 \text{ m/s}$$

$$\text{impulso} = \bar{F} \Delta t = \Delta p = -mv = -540 \text{ N}\cdot\text{s}$$

$$\bar{v} = \frac{(7.7 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s})}{2} = 3.8 \text{ m/s}$$

LA COLISIÓN DURA  $\Delta t = \frac{d}{\bar{v}} \approx \frac{1 \text{ cm}}{3.8 \text{ m/s}} = 2.6 \times 10^{-3} \text{ s}$

$$\Rightarrow \bar{F} = \frac{-540 \text{ N}\cdot\text{s}}{2.6 \times 10^{-3} \text{ s}} = 2.1 \times 10^5 \text{ N}$$

DCL



$$\bar{F} = F_{\text{suelo}} - \underbrace{mg}_{690 \text{ N}}$$

$$\Rightarrow F_{\text{suelo}} \approx 2.1 \times 10^5 \text{ N}$$

ESTA FUERZA PUEDE  
ROMPERLE LAS PIERNAS!

SI LA PERSONA FLECTA LAS PIERNAS 50 cm SE  
TIENE QUE EL TIEMPO QUE DURA LA COLISIÓN ES

$$\Delta t = \frac{50 \text{ cm}}{3.8 \text{ m/s}} = 0.13 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \bar{F} = \frac{540 \text{ N}\cdot\text{s}}{0.13 \text{ s}} = 4.2 \times 10^3 \text{ N}$$

LA FUERZA QUE EJERCE EL SUELO SERÁ

$$F_{\text{suelo}} = \bar{F} + mg = 4.9 \times 10^3 \text{ N}$$