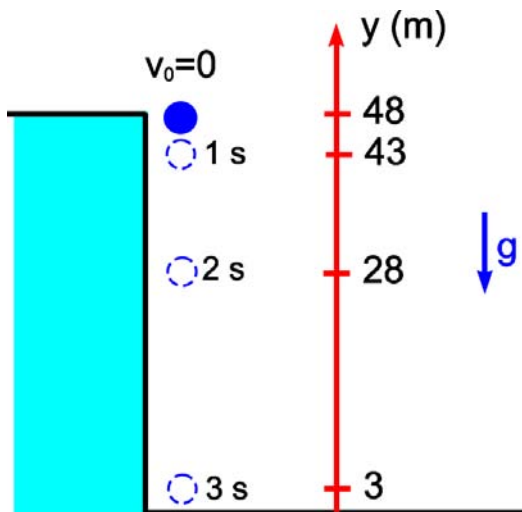


En 1993, Dave Munday, un mecánico de profesión, se lanzó por segunda vez desde el borde canadiense de las cataratas del Niagara, cayendo libremente 48 m sobre el agua y las rocas. Munday sobrevivió una vez más debido a sus amplios conocimientos de física e ingeniería.



¿Si su caída fue vertical, como pudo predecir la velocidad con la cual el barril chocaría con el agua?





datos del problema

$$y_0 = h = 48 \text{ m}$$

$$v_0 = 0$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

velocidad del barril al chocar con el agua

$$v_{\text{agua}} = -gt_{\text{caída}} = -\sqrt{2hg}$$

$$v_{\text{agua}} = -\sqrt{2 \cdot 48 \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s}^2}$$

$$v_{\text{agua}} = -31,0 \text{ m/s} = 111,5 \text{ km/h}$$

posición y velocidad del barril

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = -gt$$

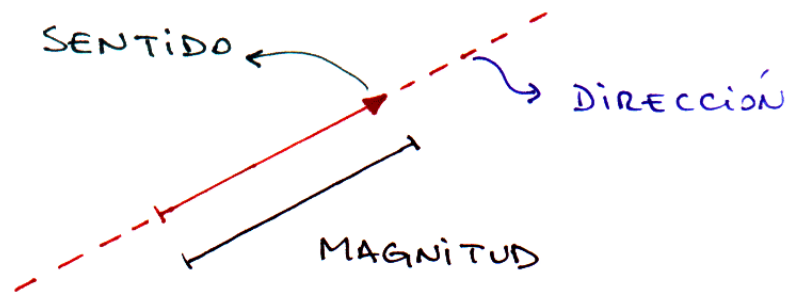
tiempo de caída del barril

$$y = 0 \Rightarrow t_{\text{caída}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 48 \cancel{\text{ m}}}{10 \cancel{\text{ m/s}^2}}} = \sqrt{\frac{48}{5}} \text{ s} = 3.1 \text{ s}$$

VECTORES

¿POR QUÉ?

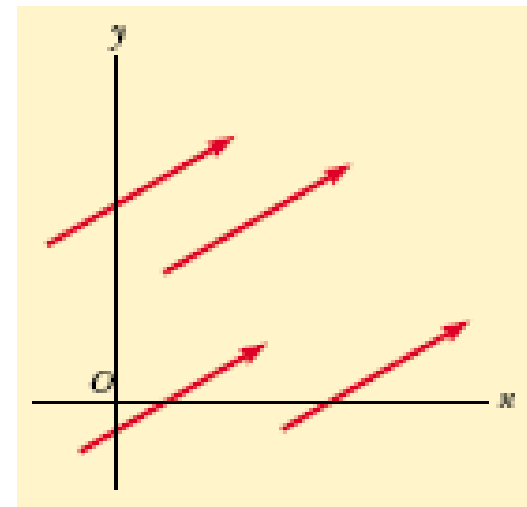
- DESCRIBIR MOVIMIENTO EN 2 Y 3 DIM.
- NOTACIÓN MAS COMPACTA



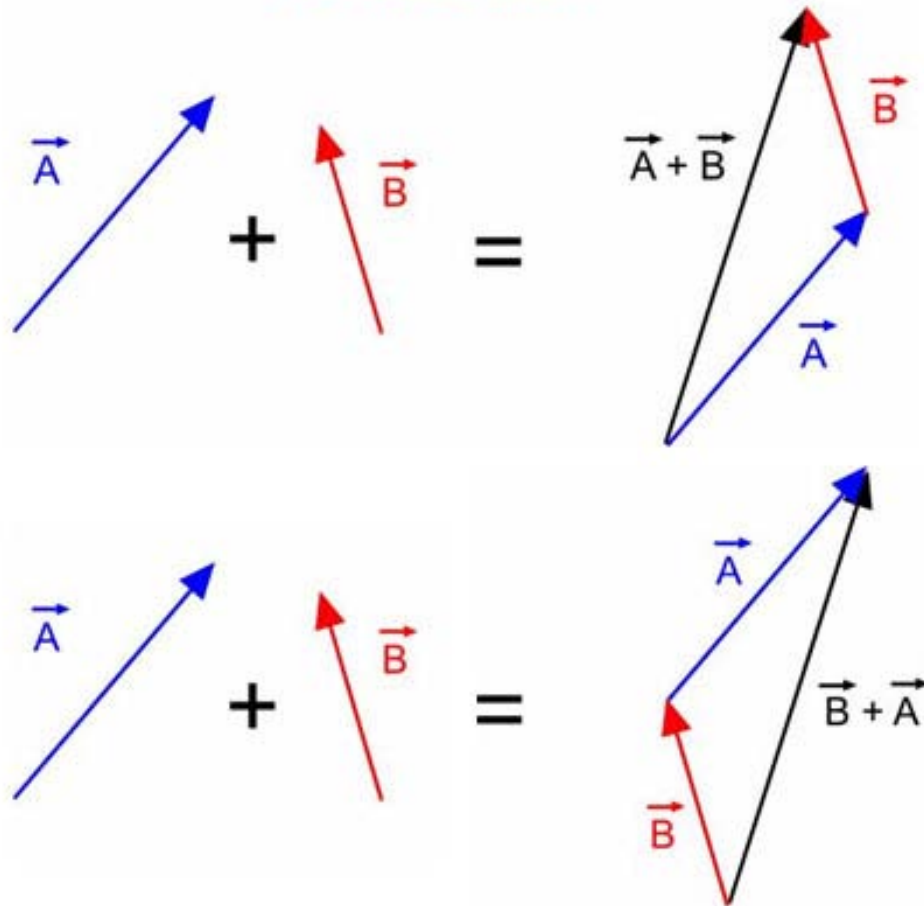
EJEMPLOS :

↓ g
POSICIÓN Y VELOCIDAD DE
UN OBJETO

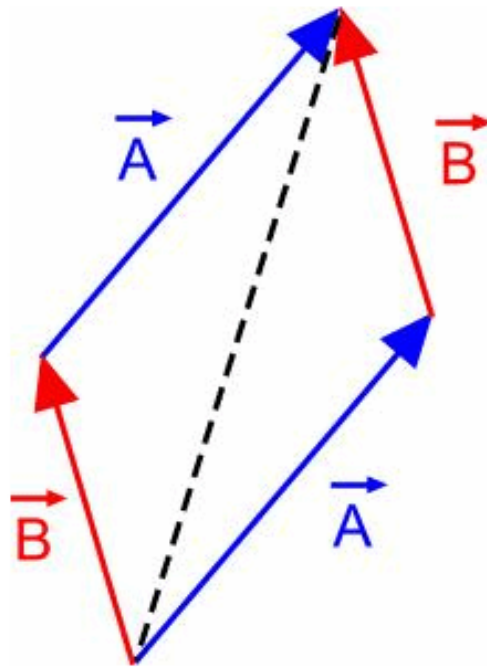
Dos vectores son iguales si sus magnitudes son iguales y ambos apuntan en la misma dirección aún cuando sus puntos de partida sean diferentes.



GEOMETRÍA INDEPENDIENTE DEL SISTEMA DE REFERENCIA



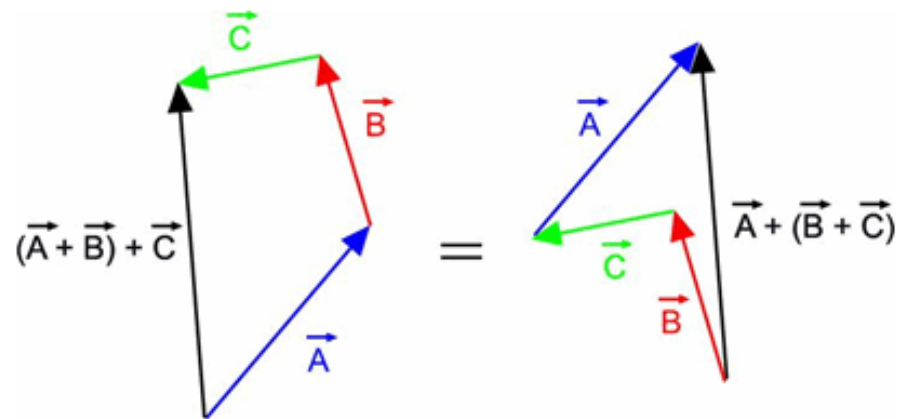
LEY DEL PARALELOGRAMO



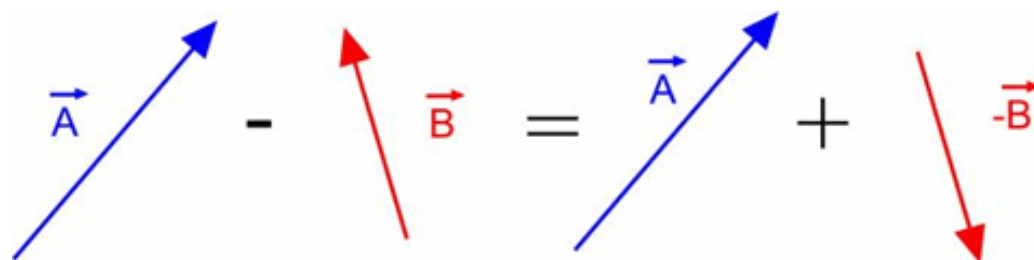
SUMA DE VECTORES ES CONMUTATIVA
¡NO IMPORTA EL ORDEN!

ASOCIATIVIDAD

SUMA DE 3 VECTORES



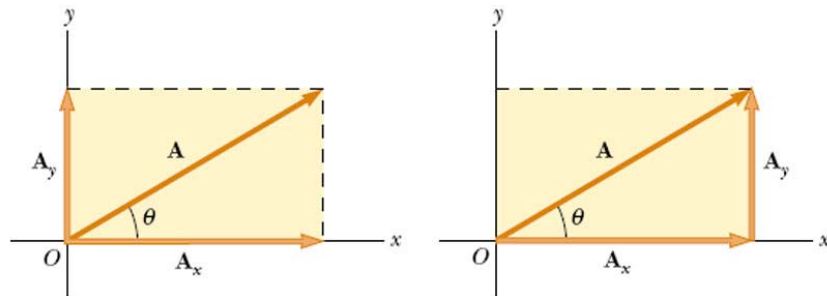
RESTA DE VECTORES



VECTORES

REPRESENTACIÓN ANALÍTICA

→ SISTEMA DE REFERENCIA



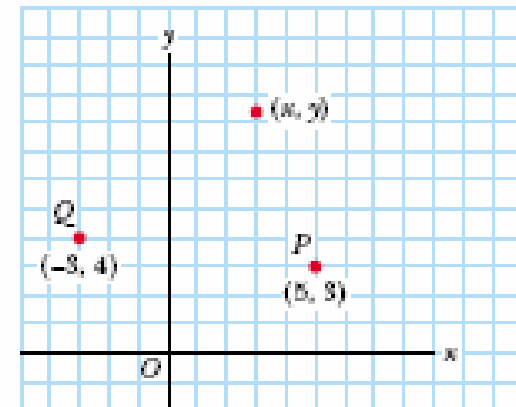
$$2\text{Dim} \rightarrow \vec{A} = (A_x, A_y)$$

PAR ORDENADO

MAGNITUD DEL VECTOR $\vec{A} \equiv |\vec{A}|$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Sistema de referencia



COMPONENTES CARTESIANAS

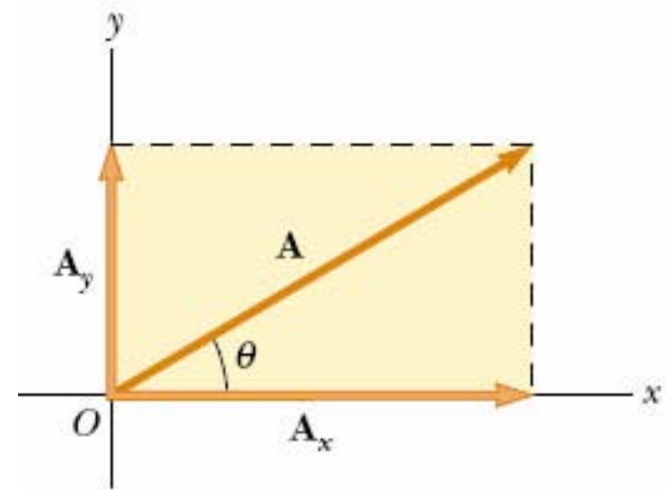
$$A_x = |\vec{A}| \cos \theta$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin \theta$$

¡ ORDEN DE LAS COMPONENTES ES IMPORTANTE !

DIRECCION $\rightarrow \tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

SENTIDO \rightarrow SIGNO DE LAS COMPONENTES
 A_x y A_y



SUMA DE VECTORES

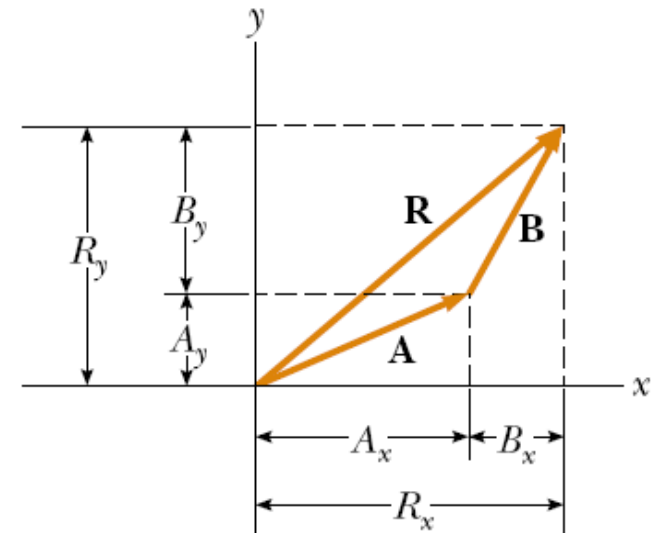
$$\begin{array}{l} \vec{A} = (A_x, A_y) \\ \vec{B} = (B_x, B_y) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \vec{A} = (A_x, A_y) \\ \vec{B} = (B_x, B_y) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{USANDO EL MISMO} \\ \text{SISTEMA DE} \\ \text{REFERENCIA} \end{array}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y)$$

PARA SUMAR VECTORES SE SUMAN SUS COMPONENTES

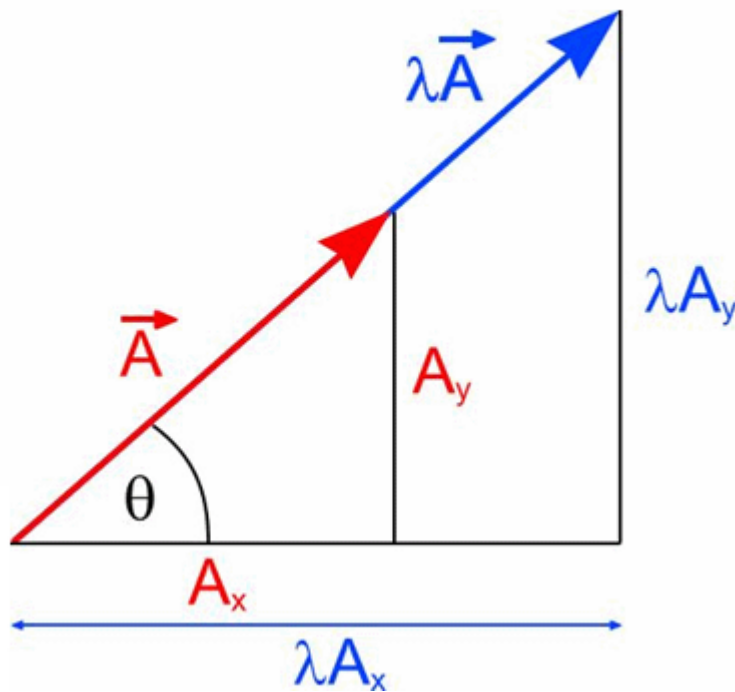
RESTA DE VECTORES

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y)$$

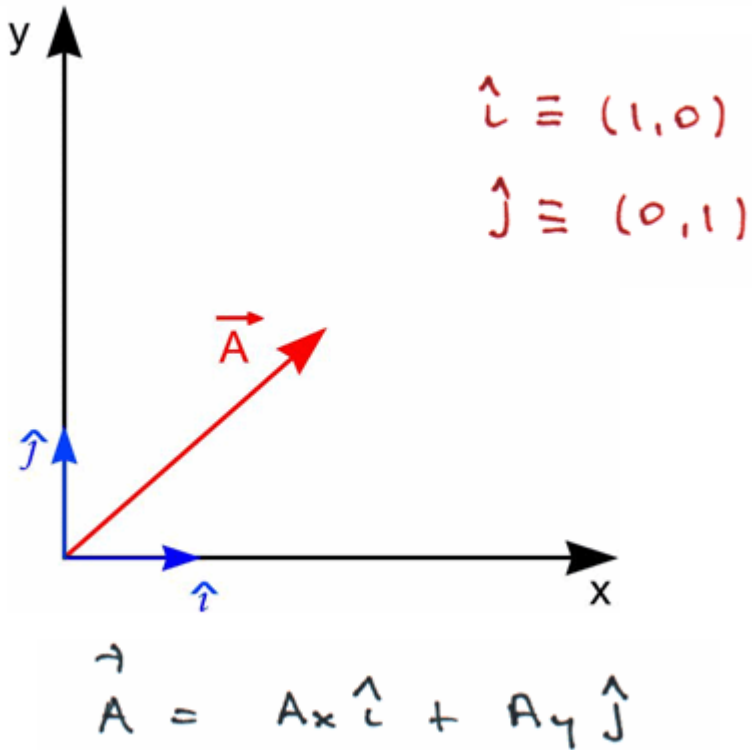


Multiplicación por escalar

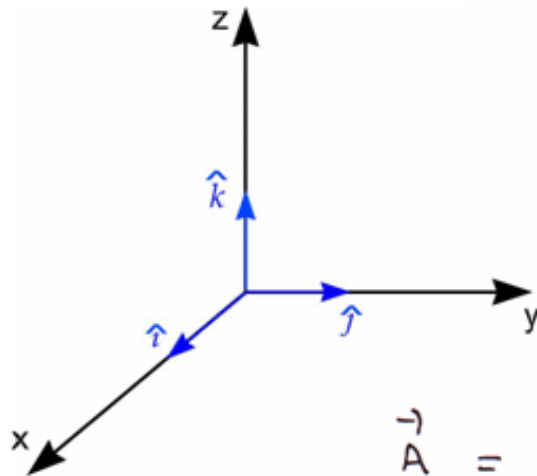
$$\lambda \vec{A} = \lambda (A_x, A_y) = (\lambda A_x, \lambda A_y)$$



VECTORES UNITARIOS



3-DIMENSIONES



$$\hat{i} \equiv (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} \equiv (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} \equiv (0, 0, 1)$$

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Movimiento en dos dimensiones

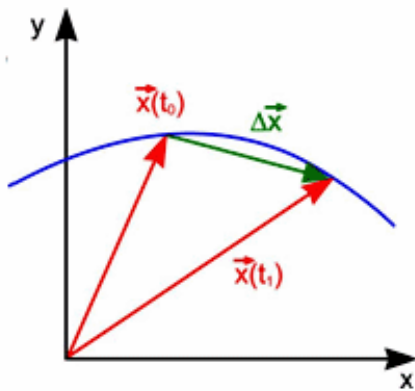
En 1922, uno de los Zacchinis, una famosa familia de circenses italianos, fue la primera “bala humana” disparada por un cañón. Para aumentar la espectacularidad del acto, la familia aumento gradualmente la distancia del vuelo, hasta que, en 1940, Emanuel Zacchini voló sobre tres ruedas de la fortuna, atravesando una distancia horizontal de 69 m.



¿Cómo pudo saber donde colocar la red y cómo pudo estar seguro que alcanzaría altura suficiente para no golpear las ruedas de la fortuna?



Posición (2 DIM)



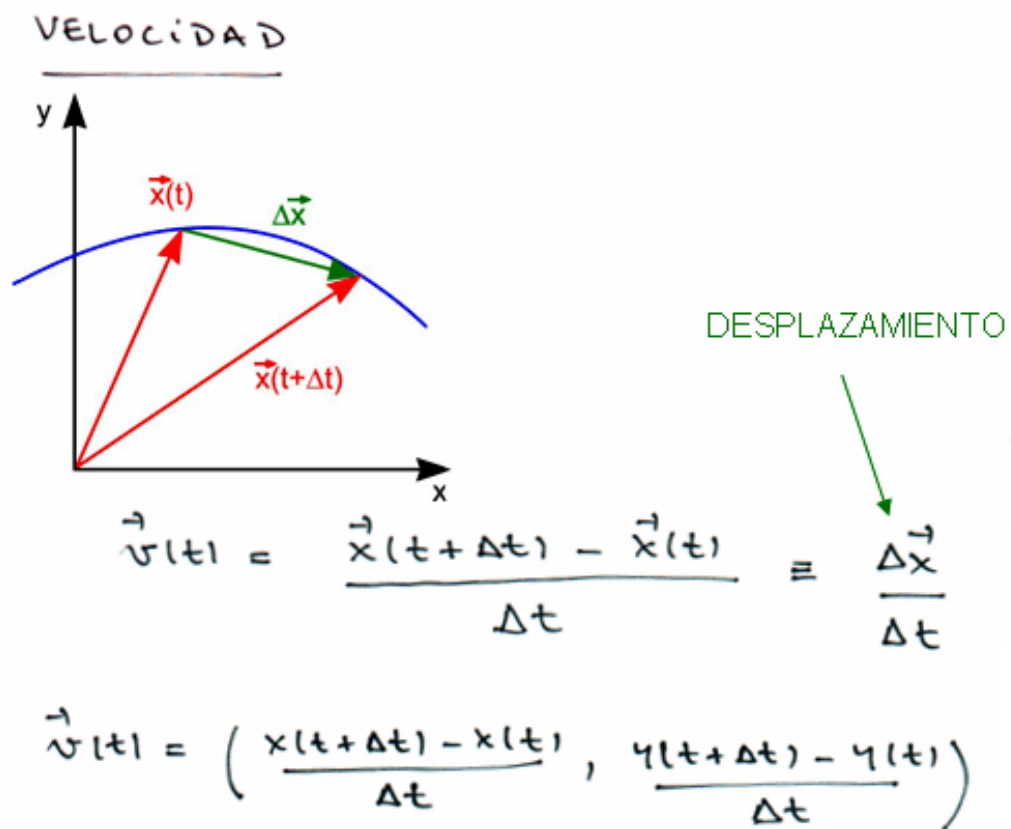
$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$$

VELOCIDAD

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$$

ACELERACIÓN

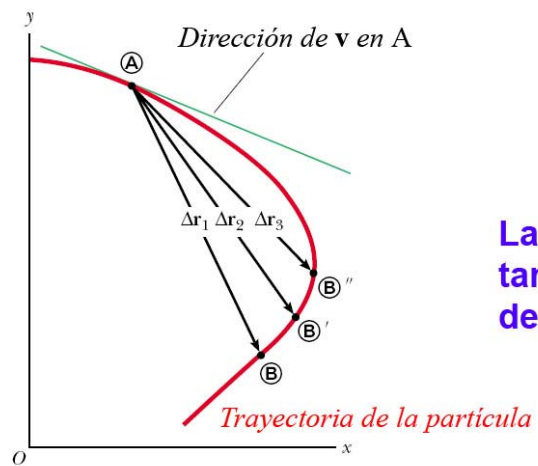
$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$$



VELOCIDAD INSTANTÁNEA

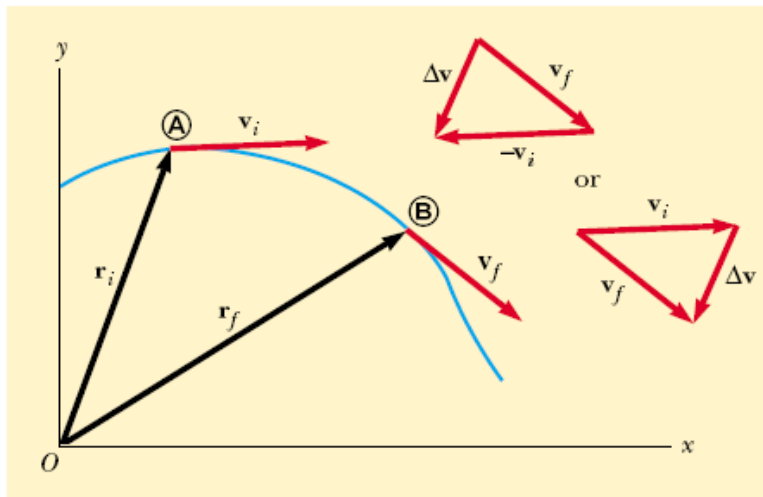
$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right] \equiv \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{\dot{x}(t)}$$

ANÁLOGAMENTE PARA $v_y(t)$



La velocidad es siempre
tangente a la trayectoria
de la partícula

Aceleración instantánea



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

¡La aceleración no es necesariamente tangente a la trayectoria de la partícula!



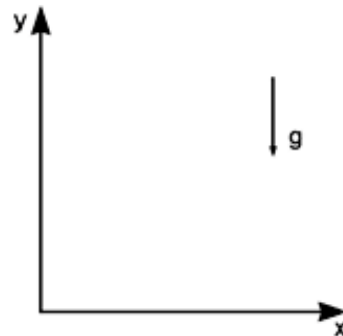
Una partícula puede acelerar si:

- El modulo de la velocidad cambia.
- La dirección de la velocidad cambia.
- Tanto el modulo de la velocidad como su dirección cambian.



ACELERACIÓN CONSTANTE

$$\vec{a} = (0, -g)$$



$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

EJE X

$$a_x = 0$$



$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$v_x = v_{0x}$$

EJE Y

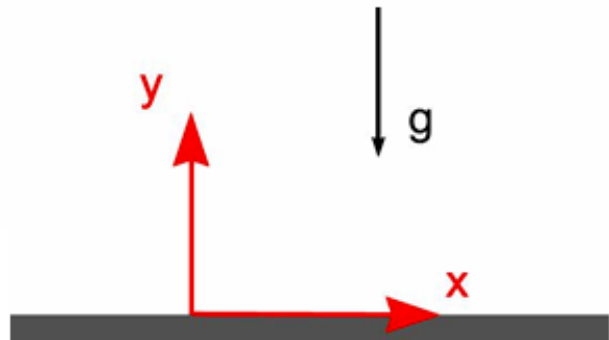
$$a_y = -g$$



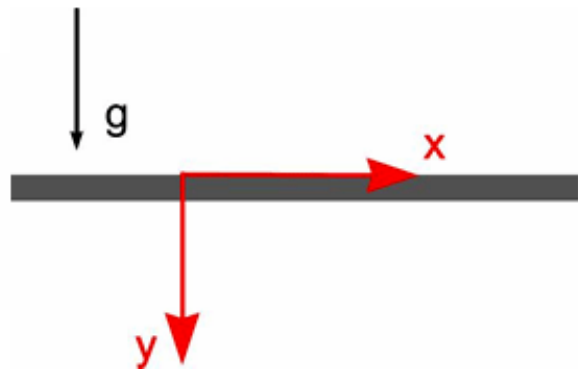
$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_{0y} - g t$$

EJEMPLO



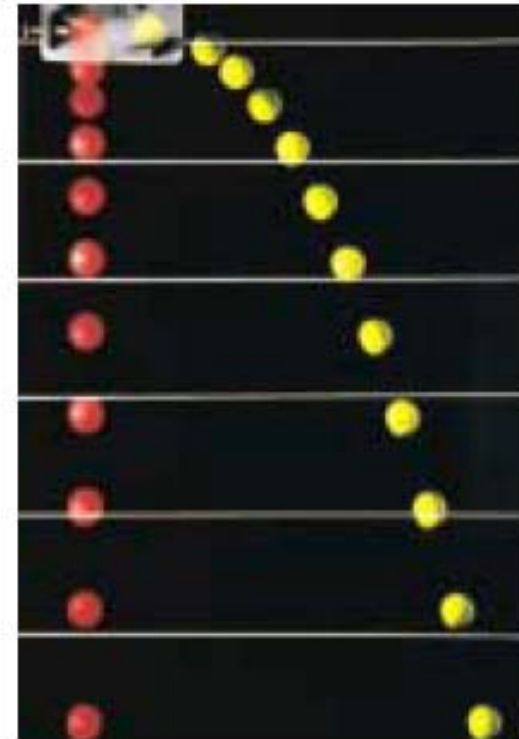
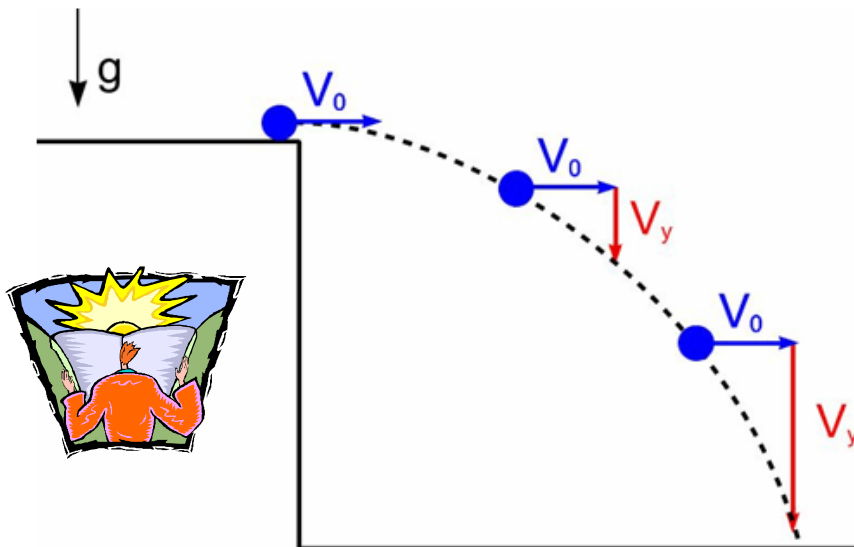
$$\vec{g} = (0, -g)$$



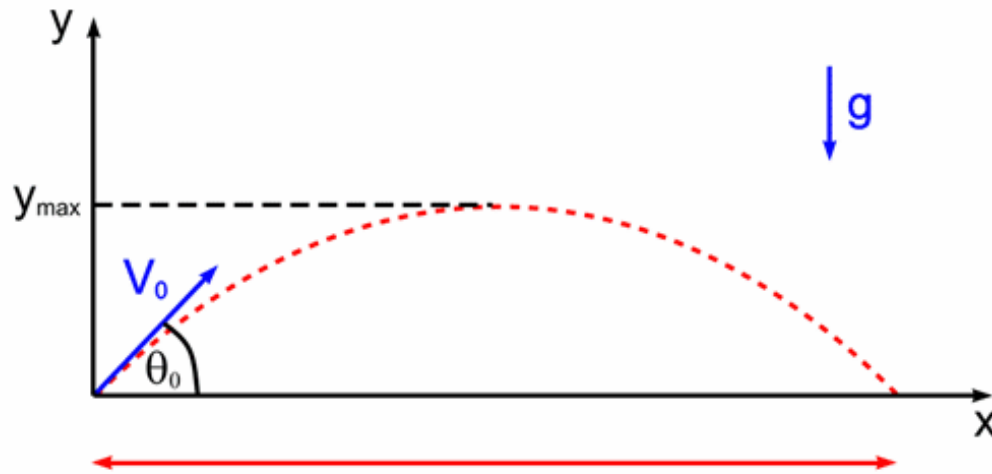
$$\vec{g} = (0, g)$$

Principio de superposición (Galileo):

“Los movimientos horizontal y vertical de un proyectil son independientes entre sí. La trayectoria del proyectil está dada por la combinación de estos movimientos”.



LANZAMIENTO DE PROYECTILES



Posición inicial R $x_0 = y_0 = 0$

Velocidad inicial $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$
 $v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$

Aceleración $a_x = 0$
 $a_y = -g$

Ecuaciones de Movimiento

EJE X

$$x = v_0 \cos \theta_0 t \quad (1)$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 \quad (2)$$

EJE Y

$$y = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t \quad (4)$$

DE LA ECUACIÓN (1)

$$x = v_0 \cos \theta_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$$

REEMPLAZANDO EN (3)

$$y = v_0 \sin \theta_0 \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \right)^2$$

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$$

$$y \equiv ax - bx^2 = \text{EC. PARÁBOLA}$$

ALCANCE MÁXIMO R

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$$

$$0 = x \left(\tan \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x \right)$$

$$\Rightarrow \text{i) } x = 0$$

$$\text{ii) } \tan \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x = 0$$

$$\therefore x = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0}{g}$$

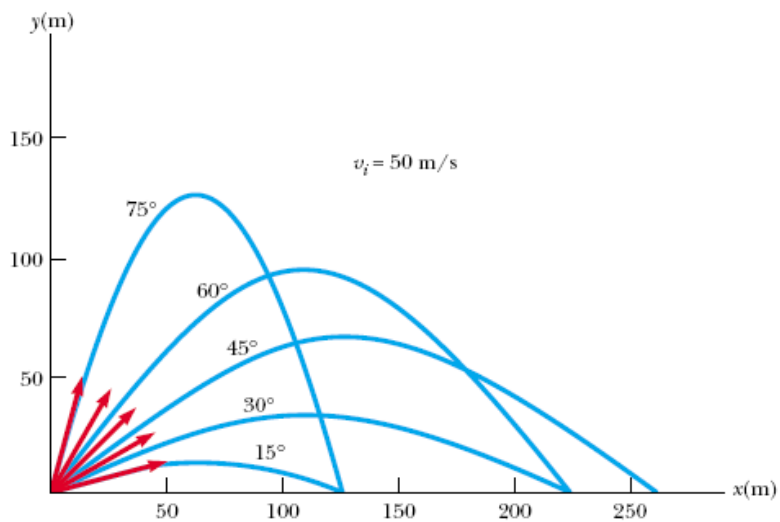


POR LO TANTO

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)$$

$$R_{\text{maximo}} = \frac{v_0^2}{g} \quad \text{PARA } \theta = 45^\circ$$



ALTURA MÁXIMA

$$v_y = 0 \Rightarrow v = v_0 \sin \theta_0 - g t_{\max}$$

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

REEMPLAZANDO EN (3)

$$H = v_0 \sin \theta_0 \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)^2$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{g}$$

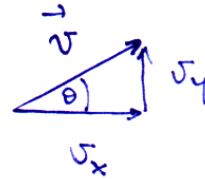
RELACIÓN ÚTIL

$$\frac{v_y}{v_{0x}} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g t}{v_{0x}}$$

$$v_{0x} \equiv v_0 \cos \theta_0 = v_x$$

PERO

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$



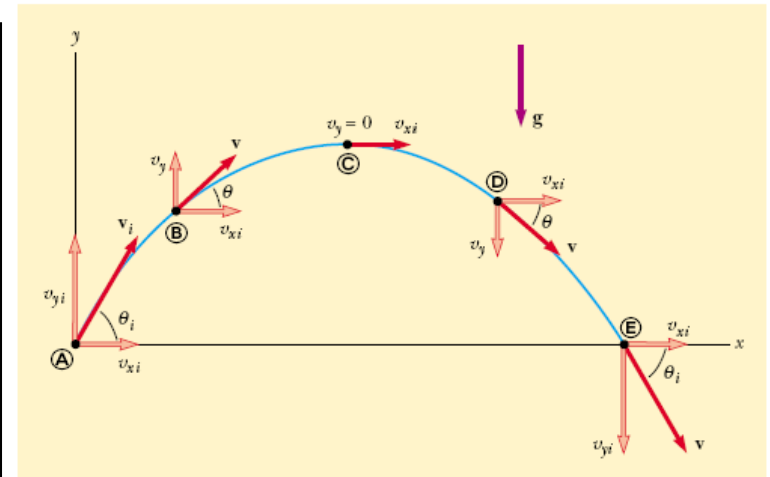
ENTONCES

$$\tan \theta = \tan \theta_0 - \frac{g}{v_{0x}} t$$

PERO

$$t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan \theta_0 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} x$$



PERO $R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0$ ENTONCES

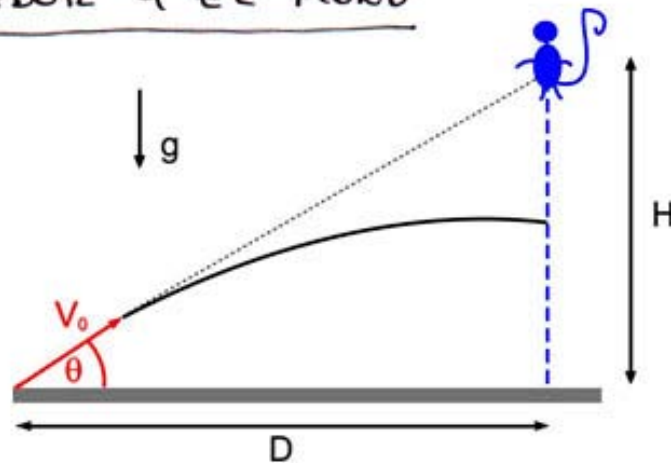
$$\tan \theta = \tan \theta_0 \left(1 - \frac{g}{v_0^2} \frac{x}{\cos^2 \theta_0} \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right)$$

$$\tan \theta = \tan \theta_0 \left(1 - \frac{2x}{\frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0} \right)$$

$$\tan \theta = \tan \theta_0 \left(1 - \frac{2x}{R} \right)$$

ÁNGULO EN FUNCIÓN DE
LA POSICIÓN

EL CAZADOR Y EL MONO



ECS. DE MOVIMIENTO

BALA

$$x = v_0 \cos \theta t \quad y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad v_y = v_0 \sin \theta - g t$$

MONO

$$Y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

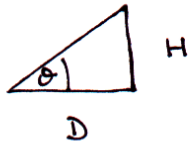
$$V_y = -gt$$

TIEMPO QUE DEMORA LA BALA EN RECORRER
LA DISTANCIA D

$$x = D \quad \Rightarrow \quad D = v_0 \cos \theta T$$

$$T = \frac{D}{v_0 \cos \theta}$$

PERO



$$\tan \theta = \frac{H}{D}$$

$$\Rightarrow D = \frac{H}{\tan \theta} = \frac{H \cos \theta}{\sin \theta}$$

ENTONCES

$$T = \frac{H}{v_0 \sin \theta}$$

ALTURA DE LA BALA

$$y_{\text{BALA}} = v_0 \sin \theta \frac{H}{v_0 \sin \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{H}{v_0 \sin \theta} \right)^2$$

$$y_{\text{BALA}} = H - \frac{1}{2} \frac{g H^2}{v_0^2 \sin^2 \theta}$$

ALTURA DEL MONO

$$y_{\text{mono}} = H - \frac{1}{2} g T^2$$

$$y_{\text{mono}} = H - \frac{1}{2} g \left(\frac{H}{v_0 \sin \theta} \right)^2$$

$$y_{\text{mono}} = H - \frac{1}{2} \frac{g H^2}{v_0^2 \sin^2 \theta}$$

POR LO TANTO

$$y_{\text{BALA}} = y_{\text{MONO}}$$

¡EL CAZADOR SIEMPRE LE APUNTA AL
MONO!