



Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile
Escuela de Verano 2007
Matemáticas III
Guía de Problemas #3

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliares: Roberto Cortez - Manuel Larenas - Orlando Rivera

Problemas de Teoremas de Fns. Continuas y Derivadas

P1.- Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que $\exists c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = g(c)$.

P2.- El objetivo de este problema es probar que toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x) > |x| \forall x \in \mathbb{R}$, alcanza su mínimo en \mathbb{R} , es decir, $(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) f(\alpha) \leq f(x)$.
Para ello considere $y_0 = f(0)$ y el intervalo $I = [-y_0, y_0]$.

a) Demuestre que $(\forall x \in \mathbb{R} - I) f(x) > y_0$

b) Concluya que f alcanza su mínimo en \mathbb{R} en un punto de I .

P3.- Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

i) Pruebe que existen $y, z \in [a, b]$ tales que: $f(y) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(z) \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$

ii) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera, existe $\beta \in [a, b]$ tal que: $f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

P4.- Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Pruebe que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$, y para $f(x) = (x - a)^n$ y $g(x) = -(b - x)^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ verifique que se cumplen las hipótesis y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$.

P5.- Usando sólo de la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones.

i) $y = \sqrt{x}$ ii) $y = \frac{1}{x}$ iii) $y = \sin^2(x)$ iv) $y = x^4 + 3x^2 - 6$ v) $y = 5(x + a)^3, a \in \mathbb{R}$

P6.- Utilizando las reglas de derivación calcule las derivadas de las siguientes funciones:

i) $y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}$ ii) $y = \frac{x^p}{x^m - a^m}$ iii) $y = (a + x)\sqrt{a - x}$ iv) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ v) $y = \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$
vi) $y = (1 + \sqrt{x})^3$

P7.- Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de α para que f sea continua en \mathbb{R}_+^* .

b) Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calcúlela.

c) Determine los puntos de continuidad de f' en $]0, \infty[$.

P8.- Sean $0 < a < b$. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$, con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que existe $c \in]a, b[$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$.

- P9.-** Sea f continua en $[0, +\infty[$, derivable en $A =]0, +\infty[$ y tal que $f(0) = 0$ y $f'(x)$ es creciente en A . Utilice el Teo. del Valor Medio para probar que $\forall x \in A$, $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$. Concluya que la función $\frac{f(x)}{x}$ es creciente en A .
- P10.-** Estudie el gráfico de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, determinando: dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, asíntotas y gráfico.
- P11.-** Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
- Encontrar los ceros, mínimos, máximos, puntos críticos y puntos de inflexión de f .
 - Estudiar las asíntotas y bosquejar el gráfico de f .
- P12.-** Considere la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Demuestre que f verifica $(1-t^2)f'(t) - tf(t) = 0$. Luego, demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f^{(n)}(t) = P_n(t)(1-t^2)^{-n-\frac{1}{2}}$. Donde P_n es algún polinomio de grado n .
Indicación: Proceda por inducción.