



Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile
Escuela de Verano 2007
Matemáticas III
Guía de Problemas #2

Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Roberto Cortez - Manuel Larenas - Orlando Rivera

Problemas de Sucesiones

P1.- Usando la definición de límite de una sucesión demostrar que:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1-n} = -3$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \frac{2}{3}$
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos(n\pi)}{n^2+1} = 0$.

P2.- Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$

P3.- Si (a_n) es una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

P4.- Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = r < 1$,

- a) Pruebe que: $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_{n+1}| \leq (r + \epsilon)|x_n|$.
Indicación: use que $|x| - |y| \leq |x - y|$
- b) Concluya que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

P5.- Probar que si (a_n) es una sucesión en \mathbb{R} tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $s_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con M fijo en \mathbb{R} , entonces (s_n) converge.

P6.- Sean (a_n) y (b_n) sucesiones definidas por la recurrencia: $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ y $b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0} \sqrt{a_n b_n}$, con $a_0 > b_0 > 0$.

- a) Pruebe que (a_n) es decreciente. Concluya que (b_n) también lo es.
- b) Muestre que (a_n) y (b_n) son acotadas inferiormente. Concluya que ambas convergen.
- c) Calcule los límites de ambas sucesiones.

Indicación: para probar que (a_n) es decreciente muestre que: $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Para ello observe que $\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_0}{a_0}$.

P7.- Considere la sucesión (s_n) definida por la recurrencia:

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a + 1}}$$

con $a > 0$ y $s_1 \geq a$.

- a) Demuestre usando inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \geq a$.
- b) Muestre que (s_n) es decreciente y concluya que su límite existe.
- c) Calcule este límite.

Problemas de Funciones Continuas y Límites de Funciones

P8.- Sea la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = u$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{u}$

P9.- Demuestre por definición:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{x-2} = 5$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$

P10.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall x, y \in \mathbb{R}) |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Demuestre que f es continua.

P11.- Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- a) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |x|$
- b) Pruebe que f es continua en 0.

P12.- Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi/2x) & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que no hay forma de elegir α de modo que f sea continua en 0.

P13.- Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}$ y reparar sus discontinuidades.

P14.- Calcular los siguientes límites si es que existen:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^p - a^p}{x^p}, p > 0$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin mx}, m \neq 0, n \neq 0$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

P15.- Para $f(x) = e^{\frac{1}{x} \frac{(1-x)^2}{(x-2)}}$ determinar:

- a) Dominio, ceros y signos.
- b) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- c) Conjunto de puntos de continuidad.
- d) Gráfica.