



Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile
Escuela de Verano 2007
Matemáticas III
Guía de Problemas #1

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliares: Roberto Cortez - Manuel Larenas - Orlando Rivera

Problemas de Lógica

P1.- Sean p, q y r proposiciones. Demostrar con y sin tablas de verdad que las siguientes proposiciones son tautologías:

- (i) $p \Rightarrow (p \vee q)$
- (ii) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
- (iii) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
- (iv) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- (v) $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$
- (vi) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

P2.- Sean p y q proposiciones. Se define la proposición “ni p ni q ”, denotada $p \downarrow q$, a través de la sgte. siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- (i) Probar que $\sim p \Leftrightarrow (p \downarrow p)$ y que $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \downarrow q)$.
 - (ii) Expresar las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $p \wedge q$ usando sólo \downarrow y \sim .
- P3.-** Los trágicos hechos acontecidos en la mansión Ω han conducido a la brigada de homicidios a detener a 3 sospechosos del horrendo crimen. Para no enlodar a las inocentes familias de los susodichos, en lo que sigue nos referiremos a ellos como S_1 , S_2 y S_3 . Durante el interrogatorio, las declaraciones de los sospechosos fueron las siguientes:

- S_1 : “ S_2 es culpable y S_3 es inocente”
- S_2 : “Si S_1 es culpable, entonces S_3 también es culpable”
- S_3 : “Yo soy inocente, pero alguno de los otros dos es culpable.”

Suponiendo que los inocentes dijeron la verdad y los culpables mintieron, justifique matemáticamente quiénes son los culpables.

P4.- a) Negar las proposiciones sgtes.:

- i) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x < y$
- ii) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x > 1 \wedge y \leq 1$

b) Indique el valor de verdad de las sgtes. proposiciones:

- i) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{R}) n(x^2 - mx) \leq 0$
- ii) $(\forall x \in A)(\exists \delta > 0) x^2 > \delta$, donde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$

Problemas de Conjuntos

P5.- Pruebe que: $B = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \Leftrightarrow A = \phi$

P6.- Se define el “conjunto de las partes de A”: $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Pruebe las sgtes. propiedades de este cjto.:

- i) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$
- ii) $P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$ (pruebe mediante un contraejemplo que la otra inclusión es falsa)
- iii) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
- iv) $A \cap B = \phi \Leftrightarrow P(A) \cap P(B) = \{\phi\}$
- v) $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

P7.- Sea A un subcjto. de U . Probar que:

$$\forall X, Y \subseteq U, X = Y \Leftrightarrow (X \cup A = Y \cup A \wedge X \cap A = Y \cap A)$$

Indicación: pruebe previamente que $B = [(B \cup A) \setminus A] \cup (B \cap A)$

P8.- Se define el “la diferencia simétrica de X e Y”: $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Pruebe las sgtes. propiedades de esta operación.:

- i) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (una definición alternativa de la diferencia simétrica)
- ii) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (propiedad asociativa) Indicación: ver que $(X \triangle Y)^c = (X \cap Y) \cup (X^c \cap Y^c)$
- iii) $A \triangle B = C \Leftrightarrow A \triangle C = B$
- iv) $B = A \triangle B \Rightarrow A \setminus B = \phi$
- v) Sea $C = (A \cup B)^c$, pruebe que $A \triangle B \triangle C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

Problemas de Inducción

P9.- Probar por inducción las sgtes. proposiciones:

- i) La suma de los primeros n números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$
- ii) $7^n + 1$ es divisible por 8, para todo n impar
- iii) El último dígito del número $2^{2^n} + 1$ es 7
- iv) $n^5 - n$ es divisible por 5 para todo n natural

P10.- La sucesión de Lucas (Anatole Lucas, 1842-1891) es una sucesión de la forma: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 \dots$ y que está definida por la sgte. regla inductiva: $L_0 = 2, L_1 = 1, L_2 = L_1 + L_0, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$. Sean ahora a, b, c, r, s, t números naturales fijos, pruebe que $\forall n > 1, L_{n+a} = sL_{n+b} + tL_{n+c}$ asumiendo que es cierta para $n = 0, 1$.

- P11.-** a) La sucesión a_n se define por la sgte. relación de recurrencia: $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, a_1 = 0, a_2 = 1$. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2^{n-1} - 1$.
- b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \geq -1, (1+a)^n \geq 1 + na$. Este resultado se conoce como “Desigualdad de Bernoulli” (Jacques Bernoulli, 1654-1705).

- c) Pruebe que cualquier cantidad entera de pesos mayor a 7 puede pagarse con monedas de \$3 y \$5.

Problemas de Axioma del Supremo y Funciones

P12.- Para los sgtes. cjtos. de números reales indique, si existen, el cjto. de cotas, máximo, mínimo, supremo e ínfimo:

- i) $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
- ii) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x^2 \leq 2\}$

P13.- Sea $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente:

- a) Pruebe que si A satisface $(\forall x \in A)(\exists y \in A)$ tal que $x \leq y$, entonces A tiene supremo pero no máximo.
- b) Pruebe que si A satisface $(\exists y \in A)$ tal que $(\forall x \in A) x \leq y$, entonces A tiene máximo.
- c) Encuentre un cjto. A que cumpla las proposiciones anteriores por separado.

P14.- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se define la función $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula $f_{a,b}(x) = ax + b$ en cada $x \in \mathbb{R}$.

- (i) Demuestre que $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$.
- (ii) Para $a \neq 0$ demuestre que $f_{a,b}$ es biyectiva.
- (iii) Para $a \neq 0$ determine $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$.

P15.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no idénticamente nula (esto significa que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ con $f(x_0) \neq 0$) que cumple:

- a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- b) $f(xy) = f(x)f(y)$
- i) Pruebe que $f(0) = 0, f(1) = 1$.
- ii) Calcule $f(x)$ para $x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Q}$. Indicación: pruebe por inducción que $f(n) = n \forall n \in \mathbb{N}$. Concluya para \mathbb{Z}, \mathbb{Q}
- iii) Probar que $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ y deducir que f es creciente. Indicación: use que $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$.
- iv) Probar que $f(x) = \sup\{f(r) \mid r \leq x, r \in \mathbb{Q}\}$ y concluir que $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

P16.- Sea $T : A \rightarrow A$ una función. Para $a \in A$, se define $T^n(a) := T(\dots T(T(a)))$.

- a) Probar que si $(\forall a \in A)(\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ tal que $T^n(a) = a$, entonces T es inyectiva.
Indicación: note que si $T^n(a) = a$, y si k es un natural mayor que 0, entonces $T^{nk}(a) = a$.
- b) Ahora suponga que A es finito.
Pruebe que si T es inyectiva entonces $(\forall a \in A)(\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ tal que $T^n(a) = a$.
Indicación: muestre primero que en $a, T(a), T^2(a), T^3(a), \dots, T^k(a), T^{k+1}(a), \dots$ deben ocurrir repeticiones.