



Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile

Escuela de Verano 2006

Matemáticas III

Guía de Problemas N° 3

III.- Problemas de Funciones Continuas y Límites de Funciones.

1. Sea la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = u$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{u}$.
2. Demuestre por definición: (i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{x-2} = 5$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$ (iii) $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$.
3. Sea la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, y $x_0 \in A$. Demuestre que
 - (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$
4. Sean a, x_0, b tales que $a < x_0 < b$ y f una función cuyo dominio incluye al conjunto $[a, x_0] \cup]x_0, b[$. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = l$.
5. Determinar puntos de continuidad de las siguientes funciones
 - a) (i) $\frac{1}{x}$ (ii) x^2 (iii) $\frac{x^3-x}{x-1}$.
 - b) (i) $\frac{\sin(x)}{x}$ (ii) $\frac{\cos(x)}{x+1}$
6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall x, y \in \mathbb{R}), |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, demuestre que f es continua.
7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:
 - a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x + y) = f(x) + f(y)$
 - b) f es continua en 0.

Demuestre que:

- a) f es continua
 - b) $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = xf(1)$
8. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- a) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |x|$
- b) Pruebe que f es continua en 0.

9. Sea $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisfice

$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$

Muestre que si h es continua en $x = 1$ entonces es continua en todo punto de su dominio.
(Ind: Demuestre que $h(1) = 0$).

10. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(y) + g(y)(y - x)$$

a) Muestre que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : g(x)(y - x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y - x)$$

b) Probar que si g es una función acotada entonces f es continua en todo \mathbb{R} .

11. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, se define la función $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \max \{g(t) : t \in [0, x]\}$.
Demostrar que si $x_0 \in \mathbb{R}_+$ es tal que: $g(x_0) < f(x_0)$, entonces $(\exists \epsilon > 0)$ tal que f es constante en el intervalo $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$

12. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi/2x) & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$
Demostrar que no hay forma de elegir α de modo que f sea continua en 0.

13. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}$ y reparar sus discontinuidades.

14. Calcular los siguientes límites si es que existen.

a) (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^p - a^p}{x^p}, p > 0$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin mx}, m \neq 0, n \neq 0$

b) (i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

15. Determinar el dominio y estudiar la continuidad de la función $f(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}-1}$. ¿Cómo se debe definir f en $x = 0$ de modo que resulte continua en dicho punto?

Indicación: recordar que $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, x < 1$.

16. Determine el dominio y puntos de continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ x + \ln(x) & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \arctg((x-2)^2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

17. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

18. Para

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{(1-x)^2}{(x-2)}$$

determinar

- a) Dominio, ceros y signos.
- b) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- c) Conjunto de puntos de continuidad.
- d) Gráfica.

19. Determinar el conjunto de parámetros (a, b, c) con $a, b, c > 0$ para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{asen}(bx)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(c+(a+b)x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es continua en todo \mathbb{R} .

20. Usando sólo de la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones.

i) $y = \sqrt{x}$ ii) $y = \frac{1}{x}$ iii) $y = \operatorname{sen}^2(x)$ iv) $y = x^4 + 3x^2 - 6$ v) $y = 5(x+a)^3$, $a \in \mathbb{R}$

21. Utilizando las reglas de derivación calcule las derivadas de las siguientes funciones.

i) $y = \frac{2x^4}{b^2-x^2}$ ii) $y = \frac{x^p}{x^m-a^m}$ iii) $y = (a+x)\sqrt{a-x}$ iv) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
v) $y = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ vi) $y = \ln(\ln x)$ vii) $y = (1+\sqrt{x})^3$
viii) $y = \ln^3 x$ ix) $y = (\ln(x))^{\ln(x)}$

22. Calcular las derivadas de las siguientes funciones hallando previamente sus logaritmos.

i) $y = x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$ ii) $y = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$ iii) $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{\operatorname{sen} x}$
iv) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}})$, $(0 \leq x < \pi)$ v) $y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$ vi) $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$