

## Tautologías.

Sean  $p, q, r$  proposiciones. Representaremos por  $F$  a cualquier proposición cuyo valor de verdad es Falso y por  $V$  a cualquier proposición cuyo valor de verdad es Verdadero. Las siguientes proposiciones compuestas son siempre verdaderas o tautologías (las demostraciones que no aparecen quedan de ejercicio).

1. a)  $(p \wedge \bar{p}) \Leftrightarrow F$

b)  $(p \vee \bar{p}) \Leftrightarrow V$

2. a)  $p \wedge V \Leftrightarrow p$

b)  $p \wedge F \Leftrightarrow F$

c)  $p \vee V \Leftrightarrow V$

d)  $p \vee F \Leftrightarrow p$

3. Leyes de Negación (*De Morgan*):

a)  $(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$

b)  $(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$

**Dem:** Análisis vía tabla de verdad:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$(\bar{p} \vee \bar{q}) \Leftrightarrow (\overline{p \wedge q})$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$

La última columna es siempre verdadera luego hemos probado que  $(\bar{p} \vee \bar{q}) \Leftrightarrow (\overline{p \wedge q})$  es siempre verdadera. Para (b):

$p$	$q$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow (\overline{p \vee q})$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$

La última columna es siempre verdadera luego hemos probado que  $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow (\overline{p \vee q})$  es verdadera independientemente de  $p$  y  $q$ . □

4. Doble negación.  $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$ :

**Dem:** Análisis vía tabla de verdad:

$p$	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$F$

luego  $p$  y  $\bar{\bar{p}}$  tienen siempre igual valor de verdad. □

5. Conmutatividad:

a)  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

b)  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

La utilidad de las expresiones anterior es que cada vez que encontramos  $((\text{proposición 1}) \vee (\text{proposición 2}))$  o bien  $((\text{proposición 1}) \wedge (\text{proposición 2}))$ , si es útil, podemos cambiar el orden sin alterar el valor de verdad de la proposición resultante.

**Dem:** Analizamos las tablas de verdad:

$p$	$q$	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$V$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$V$

Las últimas columnas dicen que el resultado es cierto. □

6. Asociatividad:

a)  $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

b)  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

La utilidad de la asociatividad es que podemos decidir donde ponemos los paréntesis en una proposición compuesta.

**Dem:** Analizamos la tabla de verdad para (a):

$p$	$q$	$r$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$

□

7. Distributividad:

(a)  $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$  ;  $(q \vee r) \wedge p \Leftrightarrow ((q \wedge p) \vee (r \wedge p))$

(b)  $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$  ;  $(q \wedge r) \vee p \Leftrightarrow ((q \vee p) \wedge (r \vee p))$

**Dem:** Analizamos la tabla de verdad de sólo una de las cuatro equivalencias, las otras quedan de ejercicio:

$p$	$q$	$r$	$(q \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	col 5 $\Leftrightarrow$ col 8
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$

□

8. Idempotencias:

a)  $p \wedge p \Leftrightarrow p$ .

b)  $p \vee p \Leftrightarrow p$ .

9.  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$ .

10.  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ .

11. Reflexividades:
  - a)  $p \Rightarrow p$ .
  - b)  $p \Leftrightarrow p$ .
12. Simetría de la equivalencia:  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ .
13. Transitividad de la equivalencia:  $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ .
14. Transitividad del implica:  $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ .
15. *Ley de la Contrareciproca*:  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ .

**Dem:** Probemos esta tautología usando las propiedades antes demostradas. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 (p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) && (9) \\
 &\Leftrightarrow (q \vee \bar{p}) && (\text{Conmutatividad de } \vee) \\
 &\Leftrightarrow (\bar{\bar{q}} \vee \bar{p}) && (\text{Doble negación}) \\
 &\Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}) && (9)
 \end{aligned}$$

□

## Propiedades del álgebra de conjuntos.

**Propiedades:** Sean  $A, B, C$  conjuntos. Las siguientes proposiciones son verdaderas.

1. Para cualquier conjunto  $A$ ,  $A \subseteq A$  (propiedad refleja).
2. Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Se tiene que
 
$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$
 (propiedad antisimétrica).
3. Para conjuntos  $A, B, C$  cualquiera,  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$  (propiedad transitiva).
4. Para cualquier conjunto  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$ .

**Dem:**

1. Tenemos que probar que  $(\forall x) ((x \in A) \Rightarrow (x \in A))$  es verdadero. Luego podemos fijar un elemento  $x$  cualquiera y probar que  $(x \in A) \Rightarrow (x \in A)$  es  $V$ . Usando las tautologías se tiene que

$$(x \in A \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow (\overline{x \in A} \vee x \in A) \Leftrightarrow V,$$

de lo que se deduce el resultado.

2. Sea  $x$  un elemento cualquiera. Así  $x \in A$  y  $x \in B$  son proposiciones. Sabemos de las tautologías estudiadas en el capítulo anterior que:

$$[x \in A \Leftrightarrow x \in B] \Leftrightarrow [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)].$$

Luego si  $A = B$  es verdadero se tiene que para cualquier elemento  $x$  la proposición  $[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$  es verdadera, y en consecuencia, usando la equivalencia anterior, son verdaderas  $[x \in A \Rightarrow x \in B]$  y  $[x \in B \Rightarrow x \in A]$ . Esto quiere decir que  $(\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B)$  es  $V$  y  $(\forall x) (x \in B \Rightarrow x \in A)$  es  $V$ . Esto prueba que  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$  es verdadero. Hemos probado  $A = B \Rightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ .

La implicación *recíproca*, es decir que si  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$  es verdadero entonces  $A = B$  también lo es, se prueba de manera análoga.

Luego, como las implicaciones en ambos sentidos son ciertas, concluimos la equivalencia.

3. Suponemos la hipótesis  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$  cierta. Como debemos probar que  $A \subseteq C$ , tomamos un elemento cualquiera  $x$  fijo. Llamamos  $p \Leftrightarrow x \in A$ ,  $q \Leftrightarrow x \in B$  y  $r \Leftrightarrow x \in C$ . Por hipótesis todo elemento de  $A$  también lo es de  $B$ , y todo elemento de  $B$  también lo es de  $C$ , en particular  $x \in A \Rightarrow x \in B$  y  $x \in B \Rightarrow x \in C$  son ciertas. Pero la transitividad de  $\Rightarrow$  asegura que  $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$  (ver lista de tautologías). Así, para cualquier  $x$ ,  $x \in A \Rightarrow x \in C$  es cierta, de donde  $A \subseteq C$  es cierta.
4. Dado que  $x \in \emptyset$  es siempre falsa entonces  $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$  es siempre verdadera, es decir,  $(\forall x) x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$  es verdadera.  $\square$

**Propiedades.** Sean  $A, B, C$  subconjuntos de  $U$ , nuestro conjunto de referencia o universo. Entonces,

1.  $A \cup A = A$ ;  $A \cap A = A$ .
2.  $A \cup \emptyset = A$ ;  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .
3.  $A \cup U = U$ ;  $A \cap U = A$ .
4. Conmutatividades:  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$ .
5. Asociatividades:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .
6. Distributividades:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
7.  $A \setminus B = A \cap B^c$ .
8. Leyes de complemento de De Morgan:  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ;  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .
9.  $A \cup A^c = U$ ;  $A \cap A^c = \emptyset$ .
10. Doble complemento:  $(A^c)^c = A$ .
11.  $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$ .
12.  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ ;  $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ .
13.  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ ;  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ ;  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$ .
14.  $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

**Dem:** Las demostraciones que no demos quedan de ejercicio.

1. a)  $A \cup A = A$ : Hay que probar que  $(\forall x) x \in (A \cup A) \Leftrightarrow x \in A$ , luego basta probar para cada elemento fijo  $x$  que la proposición  $x \in (A \cup A) \Leftrightarrow x \in A$ . Sea  $x$  un elemento fijo. Se tiene por definición que  $x \in (A \cup A) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in A)$ . Además de la tautología  $p \vee p \Leftrightarrow p$  deducimos que  $(x \in A) \vee (x \in A) \Leftrightarrow (x \in A)$ . De la transitividad de la equivalencia se concluye que  $x \in (A \cup A) \Leftrightarrow (x \in A)$ , lo que demuestra la propiedad.  
b)  $A \cap A = A$ : Hay que probar  $(\forall x) x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A$ , luego basta probar para cada elemento fijo  $x$  que la proposición  $x \in (A \cap A) \Leftrightarrow x \in A$  es verdadera. En efecto,  $x \in (A \cap A) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in A) \Leftrightarrow (x \in A)$ , donde hemos usado la transitividad de la equivalencia y la tautología  $p \wedge p \Leftrightarrow p$ .
2. a)  $A \cup \emptyset = A$ : Hay que probar que para cada elemento  $x$  es cierto  $x \in (A \cup \emptyset) \Leftrightarrow x \in A$ . En efecto,  $x \in (A \cup \emptyset) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in \emptyset)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee F) \Leftrightarrow x \in A$ .  
b)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ : Hay que probar que para cada elemento  $x$  es cierto  $x \in (A \cap \emptyset) \Leftrightarrow x \in \emptyset$ . En efecto,  $x \in (A \cap \emptyset) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in \emptyset) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge F \Leftrightarrow F \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .
3.  $A \cup B = B \cup A$ : Hay que probar que para cada elemento fijo  $x$  se tiene

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in (B \cup A).$$

En efecto:

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \Leftrightarrow (x \in B) \vee (x \in A) \Leftrightarrow x \in (B \cup A),$$

donde hemos usado la propiedad  $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ .

4.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ : Hay que probar que para cada elemento  $x$  se tiene  $x \in ((A \cup B) \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup (B \cup C))$ . En efecto, de la definición de unión tenemos

$$x \in ((A \cup B) \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C.$$

Luego, usando la asociatividad del conectivo  $\vee$  deducimos

$$\begin{aligned} x \in ((A \cup B) \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.

5.  $A \setminus B = A \cap B^c$ : Hay que probar que para cada elemento  $x$  se tiene  $x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c)$ . En efecto,

$$x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B^c) \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c).$$

6.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ : Hay que probar que para cada elemento  $x$  se tiene  $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c)$ . En efecto:

$$\begin{aligned} x \in A^c \cap B^c &\Leftrightarrow \frac{x \in A^c \wedge x \in B^c}{x \in A^c \wedge x \in B^c} && (\text{def. } \cap) \\ &\Leftrightarrow \frac{x \in A^c \wedge x \in B^c}{x \in A^c \wedge x \in B^c} && (\text{def. } ()^c) \\ &\Leftrightarrow \frac{x \in A^c \wedge x \in B^c}{x \in A \vee x \in B} && (\text{De Morgan}) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B)^c && (\text{def. } \cup) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B)^c && (\text{def. } ()^c). \end{aligned}$$

7.  $A \cup A^c = U$ : En efecto, para cada elemento  $x$  se tiene  $x \in (A \cup A^c) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A^c \Leftrightarrow x \in A \vee \overline{x \in A} \Leftrightarrow V \Leftrightarrow x \in U$ . (El estudiante debe justificar cada paso con las definiciones, tautologías y propiedades usadas).

8.  $(A^c)^c = A$ : Sea  $x$  un elemento fijo. Se tiene que  $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow \overline{x \in A^c} \Leftrightarrow \overline{\overline{x \in A}} \Leftrightarrow x \in A$ , donde hemos usado la definición de complemento y tautología de doble negación:  $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ .

9.  $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$ : Para  $(\Rightarrow)$  asumimos que  $A \subseteq B$  es verdadero, entonces nuestra hipótesis es que para todo  $x$  fijo,  $x \in A \Rightarrow x \in B$  es verdadero. Debemos probar que para cada  $x$  fijo,  $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$  es verdadero. En efecto, se tiene que

$$(x \in B^c \Rightarrow x \in A^c) \Leftrightarrow (\overline{x \in B} \Rightarrow \overline{x \in A}) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B),$$

luego  $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$  tiene el mismo valor de verdad que  $x \in A \Rightarrow x \in B$  que es verdadero. Observemos que en la secuencia de equivalencias anterior usamos la ley de la contrarecíproca:  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ . Notemos además que el trabajo hecho entrega la equivalencia completa, no solo la implicación  $(\Rightarrow)$ .

10. a)  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ : Para  $(\Rightarrow)$  asumimos que  $A \subseteq B$  es verdadero, luego para cada  $x$  fijo se tiene que  $x \in A \Rightarrow x \in B$  es verdadero. Necesitamos probar que para cada  $x$  fijo  $(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in B$  es verdadera. Hagamos esta demostración analizando los valores de verdad:

- si  $x \in B$  es  $V$ , entonces  $x \in B \vee x \in A$  es  $V$ .
- si  $x \in B$  es  $F$ , entonces  $x \in A$  debe ser falso por la hipótesis, de lo que se deduce que  $(x \in A \vee x \in B)$  es falsa.

Concluimos que  $(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in B$  es verdadera.

Para  $(\Leftarrow)$ , usamos la propiedad  $A \subseteq A \cup B$  y la hipótesis  $A \cup B = B$ :  $A \subseteq A \cup B = B$ .

- b)  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$ :  $(\Leftarrow)$  Suponiendo como hipótesis  $A \setminus B = \emptyset$ , debemos concluir que  $A \subseteq B$ . Pero la hipótesis dice que para cualquier elemento  $x$ ,  $x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in \emptyset$ , lo que equivale a decir que  $x \in A \wedge x \notin B$  es siempre falso, o equivalentemente, su negación:  $x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow (\overline{x \in A \wedge x \notin B}) \Leftrightarrow (\overline{x \in A} \vee \overline{x \notin B}) \Leftrightarrow (\overline{x \in A} \vee x \in B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$  es siempre verdadera (se usaron algunas tautologías clásicas como las leyes de De Morgan, la doble negación,  $(\overline{p} \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ , además de la definición de  $\notin$ ; el estudiante debería asegurarse que sabe exactamente en qué lugares esto se hizo). Así, la hipótesis EQUIVALE a  $(\forall x) x \in A \Rightarrow x \in B$ , es decir  $A \subseteq B$ . Notar que no solo hemos probado  $(\Leftarrow)$ , si no que hemos hecho algo mucho mejor, nos hemos mantenido con equivalencias y en realidad hemos probado el  $\Leftrightarrow$  completo.

11.  $A \triangle B$  es el conjunto que contiene los elementos de  $A$  que no están en  $B$  y los elementos de  $B$  que no están en  $A$ . Es decir,  $(A \triangle B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Acá queremos probar que  $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ : Vamos a trabajar algebraicamente usando algunas de las propiedades antes demostradas:

$$\begin{aligned}
 A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) && \text{(def. } \triangle \text{)} \\
 &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) && \text{(prop. 7)} \\
 &= ((A \cup B) \cap (A \cup A^c)) \cap ((B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c)) && \text{(distrib. de } \cup \text{ c/r } \cap \text{)} \\
 &= ((A \cup B) \cap U) \cap (U \cap (B^c \cup A^c)) && \text{(prop. 9, conmut. de } \cup \text{)} \\
 &= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) && \text{(prop. 3, conmut. de } \cap \text{)} \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c && \text{(De Morgan, conmut. de } \cap \text{)} \\
 &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) && \text{(prop. 7)}
 \end{aligned}$$