

Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile

Escuela de Verano 2006

Matemáticas III

Guía de Problemas No. 1

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliares: Eugenia Tapia, Francisco Silva, Manuel Arenas

Problemas de lógica

1. Sean p, q y r proposiciones. Demostrar sin usar tablas de verdad que las siguientes proposiciones son tautologías:

i) $p \Rightarrow p \vee q$

ii) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

iii) $\{(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)\} \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

iv) $\{(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p\} \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

v) $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$

vi) $\{p \wedge (p \Rightarrow q)\} \Rightarrow q$

2. Sean p, q proposiciones. Se define la proposición "ni q ni p ", la que denotamos por $p \Downarrow q$, por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \Downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

i) Probar que $\sim p \Leftrightarrow (p \Downarrow p)$ y que $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \Downarrow q)$.

ii) Expresar las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $p \wedge q$ usando sólo \Downarrow y \sim .

3. Sean r, s las siguientes proposiciones:

$$r : (\forall x)(p(x) \Rightarrow q)$$

$$s : ((\forall x)p(x)) \Rightarrow q$$

i) Niegue ambas proposiciones.

ii) De las implicancias $(r \Rightarrow s)$, $(s \Rightarrow r)$, indique cuál de ellas es una tautología.

4. Sean p, q, r tres proposiciones tales que r es falsa $p \Leftrightarrow \sim q$ es verdadera y $q \Rightarrow r$ es verdadera. Deducir el valor de verdad de p .

5. Negar las siguientes proposiciones:

i) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})x < y$

ii) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})x \geq y$

iii) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})x > 1 \wedge y \leq 1$

6. a) Negar la siguiente proposición : $(\forall x \in \mathbb{Q})(\forall \epsilon > 0)(\exists y \in \mathbb{Q}^c)\frac{\epsilon}{3} < |x - y| < \frac{\epsilon}{2}$

b) Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{N}) n(x^2 - mx) \leq 0$.

ii) $(\forall x \in A)(\exists \delta > 0) x^2 > \delta$ donde $A = \{x \in \mathbb{R}/0 < x < 10\}$

Problemas sobre conjuntos

7. Pruebe que $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

8. Recordando que se define el conjunto de las partes de A como $P(A) = \{X/X \subseteq A\}$ pruebe las siguientes propiedades de este conjunto:

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

b) $P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$, pruebe mediante un ejemplo que la otra inclusión es falsa.

c) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

d) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$

e) $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

9. Se define la operación diferencia simétrica entre conjuntos de la siguiente manera $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Para esta operación pruebe las siguientes propiedades.

a) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (asociatividad de \triangle)

b) $A \triangle B = C \Leftrightarrow A \triangle C = B$

c) $B = A \triangle B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

d) Sea $C = (A \cup B)^c$, pruebe que $A \triangle B \triangle C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

10. Ahora probaremos propiedades de la resta entre conjuntos. Sean A , B y C subconjuntos de un conjunto universo U , pruebe que :

a)

a.1) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

a.2) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

a.3) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

a.4) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

b)

b.1) $\{A \setminus (B \setminus A)\} \cup \{(B \setminus A) \setminus A\} = A \cup B$

b.2) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

b.3) $\{(A \cap B) \setminus (A \cap C)\} = (A \cap B) \setminus (A^c \cup C)$

c) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \cup (C \triangle A)$

11. a) Sea $f : E \rightarrow F$ una función y sean A , B subconjuntos de E . Pruebe que $f(B) \setminus f(A) = \emptyset \Rightarrow f(A \cup B) = f(A)$

b) Sea $f : E \rightarrow F$ una función que satisface $\forall A, B \subseteq E \ A \subsetneq B \Rightarrow f(A) \neq f(B)$. Probar que f es inyectiva.

Indicación. elija A , B adecuados

Problemas sobre inducción, sumas

12. Probar usando inducción las siguientes proposiciones:

a) La suma de los primeros n números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$

b) $7^n + 1$ es divisible por 8, para todo n impar.

c) El último dígito del número $2^{2^n} + 1$ es 7.

d) $n^5 - n$ es divisible por 5 para todo n natural.

13. La sucesión de Lucas (Anatole Lucas 1842-1891) es una sucesión de la forma: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,

47 y está definida por la siguiente regla inductiva: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_2 = L_1 + L_0$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$. Sean ahora a, b, c, r, s, t números naturales fijos, pruebe que $rL_{n+a} = sL_{n+b} + tL_{n+c}$, $\forall n \geq 0$ asumiendo que es verdadera para $n = 0, 1$

14. a) La sucesión a_n se define por la siguiente relación de recurrencia $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Pruebe que $a_n = 2^{n-1} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestre que la siguiente desigualdad de Bernoulli (Jacques Bernoulli, 1654-1705). $(1+a)^n \geq 1+na$ es válida $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \geq -1$.

c) Pruebe la siguiente fórmula: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - 2^{-n}$.

15. a) Hallar una expresión general para la suma $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$.

b) Probar que cualquier cantidad entera de pesos mayor que siete puede pagarse con monedas (si es que existiesen) de 3 y 5 pesos.

16. Calcular las sumatorias siguientes.

a) $\sum_{k=n}^m \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, donde $n \leq m$.

b) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k! (n-k)!}$, donde $n \geq 1$.

Problemas sobre Axioma del supremo y funciones

17. Sea $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{|x|+2}{|x|-2}}$. Bosqueje el grafo de f . Para ello calcule el dominio, recorrido, signos, paridad y crecimiento de la función.

18. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no idénticamente nula (esto significa que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ con $f(x_0) \neq 0$) que cumple que : (1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, (2) $f(xy) = f(x)f(y)$.

i) Pruebe que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

ii) Calcule $f(x)$ para $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Q}$

Indicación. pruebe por inducción que $f(n) = n \forall n \in \mathbb{N}$ concluya para \mathbb{Z} , y \mathbb{Q}

iii) Probar que $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ y deducir que f es creciente.

Indicación. use que $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$

iv) Probar que $f(x) = \sup\{f(r) : r \leq x, r \in \mathbb{Q}\}$ y concluir que $f(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$.

19. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{|x|-1}$

a) Pruebe que f no es inyectiva.

b) Calcule $f^{-1}([-1, 1])$

c) Sea $g : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x)$. Demuestre que g es inyectiva.

d) Restrinja el recorrido de g para obtener una función biyectiva.

20. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x - 2n & x \in [2n, 2n+1[, n \in \mathbb{N} \\ 2n+2-x & x \in [2n+1, 2n+2[, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

i) Verifique que f es función.

ii) Encuentre el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ donde la fórmula $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es una función.

iii) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$ la función $h_1 :]2n+1, 2n+2[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h_1(x) = g(x)$ es estrictamente decreciente y que la función $h_2 :]2n, 2n+1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h_2(x) = g(x)$ es estrictamente creciente.

iv) Grafique $g : A \rightarrow \mathbb{R}$

v) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$ la función $F : [2n+1, 2n+2[\rightarrow]0, \frac{1}{2n+1}]$ definida por $F(x) = g(x)$ es biyectiva y encuentre su inversa.

21. Sean $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Determine explícitamente f y g sabiendo que $g \circ f(x) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5}$ y que $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

22. Dada la fórmula $\sqrt{1 - \frac{2}{1+x}}$

a) Determinar el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que la fórmula sea una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

b) Encontrar los ceros de f .

c) Determinar paridad y periodicidad de f

d) Determinar si f es inyectiva y sobreyectiva.

e) Determinar crecimiento y decrecimiento de f .

f) Bosqueje el grafo de f .

23. i) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $a \leq b + \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$

ii) Sea $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada inferiormente con $l = \inf \{f(x)/x \in A\}$. Considere la familia de conjuntos $A_n = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \leq l + \frac{1}{n}\} \ n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = f^{-1}(\{l\})$

24. a) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ y $A = \{x \in \mathbb{R}/x > 0 \wedge \frac{ax}{a+x} \geq 1\}$. Encontrar (si existen) el ínfimo, el supremo, el mínimo y el máximo de A .

b) Pruebe que $\inf\{\frac{1}{2n+1}/n \in \mathbb{N}\} = 0$.

25. Sea $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente.

a) Pruebe que si A satisface $\forall x \in A \exists y \in A$ tal que $x \leq y$ entonces A tiene supremo pero no máximo.

b) Pruebe que si A satisface $\exists y \in A$ tal que $\forall x \in A x \leq y$ entonces A tiene máximo.

c) Encuentre un conjunto A que cumpla cada una de las proposiciones anteriores, obviamente separadamente.

26. Para los siguientes conjuntos de números reales indique, si existen, el conjunto de cotas, supremos e ínfimos, máximos y mínimos.

i) $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n}/n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

ii) $B = \{x \in \mathbb{Q}/1 \leq x^2 \leq 2\}$