

Control 1

Matemáticas II

1. Sean a y b dos números reales. Definimos las proposiciones $p(a)$ = “ a es un número racional” y $q(a, b)$ = “ $a + b$ es número racional”.

Describe en palabras cada una de las proposiciones siguientes y demuestre que son verdaderas.

a) $\forall a \in \mathbb{R}, p(a) \Leftrightarrow p(-a)$ {2.0 puntos}

(\Rightarrow) Si $p(a)$ es cierto entonces $a = \frac{c}{d}$ con $c, d \in \mathbb{Z}$ y $d \neq 0$. Entonces $-a = \frac{-c}{d}$ con $-c, d \in \mathbb{Z}$ y $d \neq 0$ y por lo tanto $p(-a)$ es cierto.

(\Leftarrow) (Manera corta) Usando lo anterior si $p(-a)$ es cierto entonces $p(-(-a)) = p(a)$ lo es también.

Si no se repite el mismo argumento anterior reemplazando a por $-a$.

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}, p(a) \wedge p(b) \Rightarrow q(a, b)$ {2.0 puntos}

(\Rightarrow) Si $p(a)$ es cierto y $p(b)$ es cierto entonces $a = \frac{c}{d}$ y $b = \frac{e}{f}$ con $c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ y $d, f \neq 0$. Entonces $a + b = \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{c \cdot f + e \cdot d}{d \cdot f}$. En que $c \cdot f + e \cdot d \in \mathbb{Z}$ y además $d \cdot f \neq 0$ puesto que ambos no son 0. Esto prueba que $q(a, b)$ es cierto.

c) $\forall a, b \in \mathbb{R}, p(a) \wedge \sim p(b) \Rightarrow \sim q(a, b)$ {2.0 puntos}

(\Rightarrow) (Por contradicción) Usando lo anterior. Si $p(a)$ es cierto y $q(a, b)$ es cierto. Entonces a es racional y $a + b$ es racional. Por la primera proposición entonces $-a$ es racional y por la segunda proposición $(a + b) - a = b$ es racional.

Por lo tanto si suponemos que $p(a)$ es cierto y que $p(b)$ no lo es y además que $q(a, b)$ es cierto llegamos a una contradicción lo que prueba el resultado valga la redundancia por contradicción.

(Otra manera) Supongamos que el resultado es falso, es decir $a + b$ es racional, queremos probar que la premisa debe ser falsa es decir $\sim p(a) \vee p(b)$ debe ser verdadera. Si $p(a)$ es falso no hay problema. Si

$p(a)$ es verdadero entonces $a + b$ es racional y a también razonando como antes se concluye que $p(b)$ es cierto.

2. Sean p , q y r 3 proposiciones. Para cada uno de los casos siguientes construya un circuito o una proposición con los conectivos lógicos vistos en clases que sea verdadera sólo cuando:

- a) Exactamente una de las 3 proposiciones p , q y r es verdadera. **{1.5 puntos}**
b) Si una de las 3 proposiciones p, q y r es verdadera entonces alguna otra es falsa. **{1.5 puntos}**

Determine si alguna de las dos implica la otra o si son equivalentes. **{3.0 puntos}**

Las tablas de verdad correspondientes son las siguientes:

p	q	r	a	b	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

De la tabla es claro que (b) implica (a) puesto que cuando (b) es verdadera (a) siempre resulta verdadera. Del mismo modo no es cierto que (a) implica (b) puesto que hay casos donde (a) es cierta y (b) no lo es.

Es posible también agregar las proposiciones $a \Rightarrow b$ y $b \Rightarrow a$ para verificar esto.

Para construir (a) . Es una expresión que es cierta en sólo 3 casos.

Cuando sólo p es verdadera es decir: $p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)$.

Cuando sólo q es verdadera es decir: $(\sim p) \wedge q \wedge (\sim r)$.

Cuando sólo r es verdadera es decir: $(\sim p) \wedge (\sim q) \wedge r$.

Por lo tanto (a) se escribe como:

$$(p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)) \vee ((\sim p) \wedge q \wedge (\sim r)) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q) \wedge r).$$

Para construir (b). Esto es un implica y por ende sólo será falso cuando la premisa sea cierta y el resultado falso. Es decir queremos una proposición que sea falsa sólo cuando haya alguna proposición verdadera y ninguna falsa. Como $p \wedge q \wedge r$ es la proposición que es verdadera cuando ocurre exactamente eso, es decir hay proposiciones verdaderas pero ninguna falsa (b) se escribe como:

$$\sim (p \wedge q \wedge r) \text{ o bien } (\sim p) \vee (\sim q) \vee (\sim r).$$

3. Sean A , B , y C conjuntos arbitrarios. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

Para esta parte la mitad del puntaje corresponde a si es verdadero o falso y la otra mitad a si la justificación es correcta.

- a) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \in C$. **{1.5 puntos}**
Verdadero. Puesto que si $B \subseteq C$ por definición de inclusión $A \in B$ implica $A \in C$.
- b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$. **{1.5 puntos}**
Falso. Sea $A = \{1\}$, $B = C = \{\{1\}\}$. Entonces $A \in B$ y claramente $B \subseteq C$ pero $A \not\subseteq B = C$.
- c) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$. **{1.5 puntos}**
Falso. Sea $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{\{1, 2\}\}$. Entonces $A \subseteq B$ y $B \in C$ pero $A \notin C$.
- d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$. **{1.5 puntos}**
Falso. Sea $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{\{1, 2\}\}$. Entonces $A \subseteq B$ y $B \in C$ pero $A \not\subseteq C$.