

Control 2 Matemáticas III

VIERNES 16 DE ENERO

Prof: P. Dartnell

Auxs: C. Alday - A. de Laire - C. Muñoz

- P1.-** (i) (2 ptos.) Probar vía inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.
- (ii) Dados $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, se denota por $a|b$ (a **divide a** b) cuando b es divisible por a . Asimismo, decimos que dos números $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ son **coprimos** si el único número que divide a ambos es el uno.

Definamos $a_n = 2^{2^n} + 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que a_n y a_m son coprimos si $n \neq m$. Para ello, argumentaremos por contradicción.

- (a) (2 ptos.) Muestre por inducción que

$$a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} + 2 = a_n \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- (b) (2 ptos.) Pruebe que si $\exists p > 1$ tal que $p|a_n$ y $p|a_m$ para $m < n$, entonces p es par e impar a la vez. Concluya el resultado pedido.

- P2.-** Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $T : A \rightarrow A$ la función definida por $T(0) = 1$, $T(1) = 2$, $T(2) = 3$ y $T(3) = 0$.

Sea también $I = \{h : A \rightarrow \mathbb{R} \mid h \text{ es función y } h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = 0\}$.

Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definamos (la función) $\hat{f} : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada $n \in A$ le asocia $\hat{f}(n) = (f \circ T)(n) - f(n)$.

- (i) (2 ptos.) Probar que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $\hat{f} \in I$.

Sea ahora $D = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función y } f(0) = 0\}$.

Definamos la función $\Delta : D \rightarrow I$ tal que a cada $f \in D$ le asocia $\Delta(f) = \hat{f}$.

- (ii) (4 ptos.) Pruebe que Δ es biyectiva.

- P3.-** (i) (2 ptos.) Demostrar **sin usar inducción** que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$.

- (ii) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}_+$ no vacíos y acotados superiormente. Se define

$$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

- (a) (1 pto.) Demuestre que $A \cdot B$ es no vacío y acotado superiormente.
- (b) (3 ptos.) Demuestre que $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$

Nota: En este control \mathbb{N} denota el conjunto de los números naturales **incluido el cero**, y \mathbb{R}_+ designa los reales positivos **incluido el cero**.

Tiempo: 3 horas