

Control 2
Matemáticas III

VIERNES 17 DE ENERO

Profesor : Pablo Dartnell R.
Auxiliares: André de Laire P. - Rodolfo Tapia N.
Ayudante: Cristián Alday E.

(P1) (a) Demuestre por inducción que para cada natural $n \geq 3$:

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$

(b) Suponga que se dispone de una lista infinita de números

$$v_0, v_1, v_2, v_3 \dots$$

y se sabe que

$$\begin{aligned} v_0 &= 2 \\ v_1 &= 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \quad v_{n+1} &= 3v_n - 2v_{n-1} \end{aligned}$$

Demuestre que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = 2^n + 1$$

Ind.: Considere la proposición abierta:

$$p(n) : (v_n = 2^n + 1) \wedge (v_{n+1} = 2^{n+1} + 1)$$

(P2) (a) Sea U un universo y $f : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ la función definida por

$$f(X) = X^c$$

Demuestre que f es biyectiva.

(b) Sea P un conjunto de proposiciones, con 3 o más elementos y $f : P \rightarrow \mathbb{N}$ una función que satisfice:

$$(\forall p, q \in P) : [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (f(p) \leq f(q))]$$

- (i) Demuestre que $(\forall p, q \in P) : [(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (f(p) = f(q))]$
- (ii) Demuestre que f no es ni inyectiva, ni sobreyectiva.

Tiempo: 2 horas