



Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile
Escuela de Verano 2005
Matemáticas III
Guía de Problemas N° 2*

- P1.-** Sean $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow E$ dos funciones tales que $g \circ f = id_E$. Probar que f es inyectiva y que g es sobreyectiva.
- P2.-** Sean $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas en cada $n \in \mathbb{N}$ por $f(n) = 2n + 1$ y $g(n) = n^2 + 1$. Recuerde que $f \circ g(n) = f(g(n))$.
- (i) Determinar si f y g son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
 - (ii) Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.
- P3.-** Sea la función $f : [3, +\infty) \rightarrow [2, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 6x + 11$ en cada $x \geq 3$. Demostrar que f es biyectiva.
- P4.-** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x$, en cada $x \in A$. Demostrar que si $A \subseteq \mathbb{Q}$ entonces f es inyectiva.
- P5.-** Sea F el conjunto de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Se define la función $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $f \in F$ le asocia $\varphi(f) = f(0)$. Demuestre que φ es una función sobreyectiva.
- P6.-** Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x + 1$.
- (i) Probar que f es una función biyectiva.
 - (ii) Probar que no es cierto que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para cualquier par de reales x e y .
- P7.-** Sean $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tres funciones definidas en cada $x \in \mathbb{Z}$ como $f(x) = 1 - x$, $g(x) = -x - 1$ y $h(x) = x + 2$.
- (i) Probar que $h \circ g \circ f = g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$.

*Esta guía fue extraída del material de apoyo confeccionada por el Departamento de Ingeniería Matemática para el curso de Álgebra dictado en Plan Común.

P8.- Sean $E \neq \emptyset$ y $A \subseteq E$ (fijo). Se definen las funciones f y g de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ tales que:
 $f(X) = A \cup X$ y $g(X) = A \cap X$, para todo $X \subseteq E$.

- (i) Determinar $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(A^c)$ y $f(E)$.
- (ii) Demostrar que $g \circ f = f \circ g$.
- (iii) Determinar si f y g son sobreyectivas.
- (iv) Determinar un conjunto A para el cual f es biyectiva.
- (v) Determinar un conjunto A para el cual g es biyectiva.

P9.- Sea E un conjunto y $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ la función que a todo $X \subseteq E$ le asigna $f(X) = E \setminus X$.

- (i) Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de f .
- (ii) Determinar $f \circ f$, si existe.
- (iii) Suponga que $E = \{0, 1, 2\}$. Si $A = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$ y $B = \{\emptyset, \{1\}\}$, calcular $f(A)$.

P10.- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se define la función $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula $f_{a,b}(x) = ax + b$ en cada $x \in \mathbb{R}$.

- (i) Demuestre que $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$.
- (ii) Para $a \neq 0$, demuestre que $f_{a,b}$ es biyectiva.
- (iii) Para $a \neq 0$ determine $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$.

P11.- Considere $A = \{1, \dots, n\}$. Sea $B \subseteq A$, $B \neq A$, un subconjunto estricto de A . Defina $G_B = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ es biyección y } f[(i)] = i, \forall i \in B\}$ el conjunto de todas las biyecciones que dejan invariante B .

- (i) Pruebe que $G_B \neq \emptyset$.
- (ii) Pruebe que si $f \in G_B$ y $g \in G_B$ entonces $g \circ f \in G_B$.

P12.- Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente: $f(n + m) = f(n) + f(m)$ para cada par de enteros n y m .

- (i) Probar que $f(0) = 0$.
- (ii) Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.

P13.- Considere las funciones $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ por $f(n) = \frac{1}{2^n}$ y $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida en cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$.

(a) Determine si f , g y $g \circ f$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

P14.-

(a) Probar que para todo A, B, C conjuntos se tiene,

$$(a.1) \quad A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C,$$

$$(a.2) \quad A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C,$$

(b) Sea E un conjunto y A un subconjunto de E . Se define la función $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ como $f(X) = X \Delta A$ para cada $X \subseteq E$. Probar que f es biyectiva .

P15.- a) Probar **sin usar inducción** que para cada natural $n \geq 1$,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$$

Nota: Recuerde que $\sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

b) Sean k, p, n naturales tales que $0 \leq k \leq p \leq n$. Pruebe las siguientes igualdades:

$$1) \quad \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \binom{p}{k}$$

$$2) \quad \binom{n}{0} \binom{n}{p} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{p-1} + \dots + \binom{n}{p} \binom{n-p}{0} = 2^p \binom{n}{p}.$$

P16.- a) Ocupando sumas conocidas encuentre la fórmula de:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n.$$

y demuéstrela por inducción

b) Demuestre que:

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n,$$

donde $a+b > 0$, $a \neq b$ y $n \geq 2$.

P17.- Probar por inducción que:

- a) $\forall n \in \mathbb{N}, 6$ divide a $n^3 + 5n$.
- b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = \alpha n$, y determine el valor de la constante α .
- c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, (x-y)$ divide a $x^n - y^n$.
- d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
- e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, el producto de n números naturales mayores estrictos que uno y no necesariamente consecutivos es mayor estricto que n .
- f) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.
- g) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- h) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1+1} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{1+2} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{1+3} \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n!}.$$

- i) $\forall n \geq 2, 2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$, donde $(a+b) > 0$ y $a \neq b$.

P18.- Encuentre el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(1 + 2x + 3x^2)^5$.

P19.- Nos proponemos demostrar que, si tenemos n rectas en el plano, de modo tal que no existen paralelas y además la intersección entre ellas es dos a dos (es decir, no existen tres rectas que se corten en el mismo punto), entonces el total de regiones formadas es $S_n = \left(\sum_{j=0}^n j\right) + 1$.

- a) Mostrar que n puntos sobre una recta generan $n + 1$ segmentos (use inducción).
- b) Usando (i) encontrar una expresión general para S_n en términos de S_{n-1} . Explique claramente y demuestre por inducción la fórmula deseada para S_n .

P20.- Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ defina $k = 2^n$. Queremos probar que todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ de $2k - 1$ elementos posee un subconjunto $X \subseteq Y$ de k elementos cuya suma es divisible por k .

- a) Para $n = 1$ y $k = 2$ pruebe que de todo subconjunto de 3 elementos de \mathbb{N} se pueden extraer 2 números cuya suma es divisible por 2.
- b) Probar la propiedad para n cualquiera.

P21.- a) Pruebe sin usar inducción que para $n \geq 1, 0 \leq k \leq n, \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$ y deduzca que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

b) Calcular las sumatorias siguientes.

$$1) \sum_{k=n}^m \log\left(1 + \frac{1}{k}\right), \text{ donde } n \leq m.$$

$$2) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k! (n-k)!}, \text{ donde } n \geq 1.$$

c) Sea $S = 1 + (1+b)q + (1+b+b^2)q^2 + \dots + (1+b+\dots+b^n)q^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, $q, b \in \mathbb{R}$, $q, b \neq 1$. Escribir S como una expresión de dos sumatorias y calcúlela.

d) (i) Sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural fijo. Probar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\frac{p!}{0!} + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(p+1)} \frac{(p+n)!}{(n-1)!}$$

Use la propiedad anterior para deducir las fórmulas para calcular $\sum_{k=1}^n k$ y $\sum_{k=1}^n k^2$.

(ii) Calcular para $m \geq 1$,

$$\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$$

(iii) Calcular

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}$$

P22.- (i) Se define la función $\varphi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Y para cada número natural $n \geq 2$ se define por recurrencia la función $\varphi_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi_n(x_0, \dots, x_n) = \varphi_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) + \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

en cada $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Probar usando inducción que

$$\varphi_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$$

(ii) Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{k}{3^i}\}$. Pruebe que A es numerable.

P23.- Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $T : A \rightarrow A$ la función definida por $T(0) = 1$, $T(1) = 2$, $T(2) = 3$ y $T(3) = 0$.

Sea también $I = \{h : A \rightarrow \mathbb{R} \mid h \text{ es función y } h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = 0\}$.

Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definamos (la función) $\hat{f} : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada $n \in A$ le

asocia $\hat{f}(n) = (f \circ T)(n) - f(n)$.

(i) Probar que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $\hat{f} \in I$.

Sea ahora $D = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función y } f(0) = 0\}$.

Definamos la función $\Delta : D \rightarrow I$ tal que a cada $f \in D$ le asocia $\Delta(f) = \hat{f}$.

(ii) Pruebe que Δ es biyectiva.

Tarea 2

Hacer los problemas: **P8**, **P10**, **P14**, **P16**, **P17** partes **b)** **f)** **h)** **i)**, **P21** partes **b)** y **d)**, y **P23**.

Observación: Es aconsejable que redacten los problemas en hojas separadas, pues sólo se entregan 3.