

Matemáticas Financieras

Profesor Claudio Jiménez C.

DIPLOMA DE PREPARACIÓN Y
EVALUACIÓN SOCIAL DE
PROYECTOS

Valor del Dinero en el Tiempo (VDT)

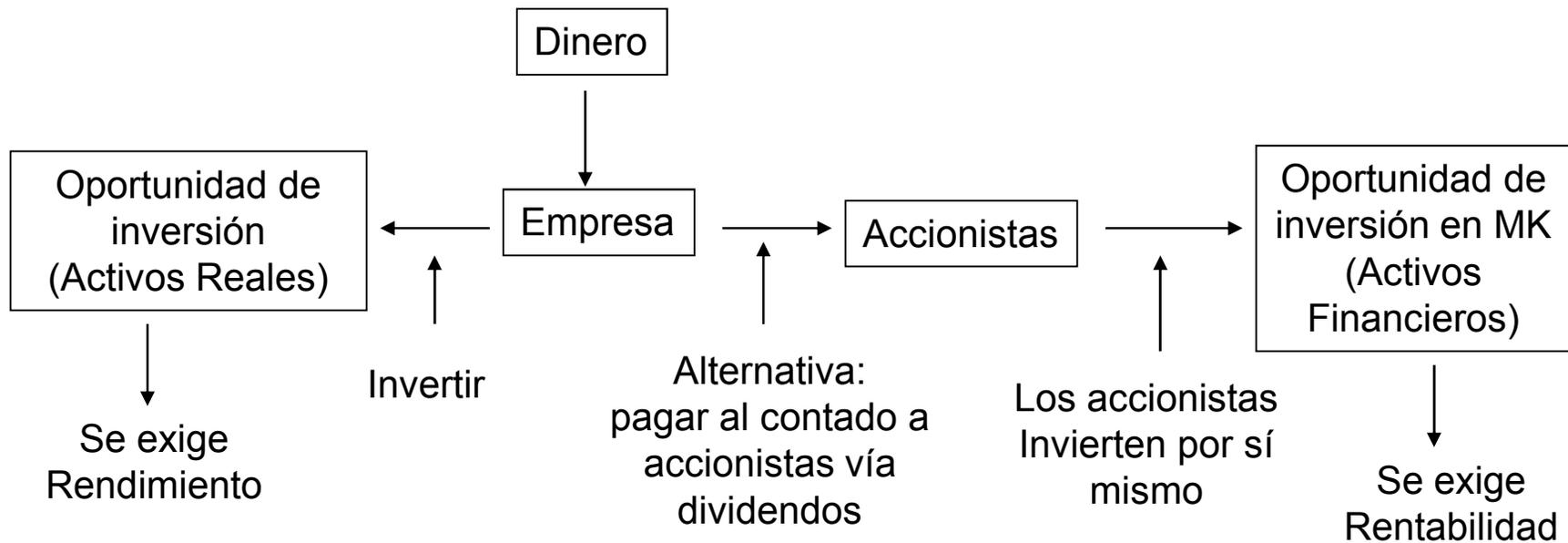
Indice

1. **Definiciones**
2. **Tasas de Interés Simple y Compuesta**
3. **Diagrama Flujo de Caja (DFC)**
4. **Tasas Efectivas y Nominales**
5. **Tasas Spots y Forwards**
6. **Inflación, Flujos Reales y Nominales, Interés Real y Nominal**
7. **Tablas de Pago de Créditos**
8. **Ejercicios**

1. Definiciones

- El VDT es el cambio en la cantidad de dinero durante un período de tiempo dado.
- “El Dinero hace Dinero”. Ejemplos:
 - Un depósito en el banco
 - Invertir en un negocio
 - Invertir en fondos mutuos
 - Pedir un préstamo
- El VDT se manifiesta en el Mercado a través de las “**Tasas de Interés**”
- Las Tasas de Interés son un concepto de “**Costo de Oportunidad**”

- Veamos el ejemplo de un **Director Financiero** de una empresa:



- Por lo tanto, el mínimo rendimiento que se exige a los activos reales es la rentabilidad que obtendrían los accionistas en el mercado de capitales al realizar inversiones en activos financieros (Bonos y Acciones) de similar riesgo al de los activos reales. Esto se denomina **“Costo de Oportunidad del Capital”**

- Dos aspectos relevantes influyen en las **Decisiones de Inversión y de Financiamiento**: “El Riesgo y el Tiempo”.
- El VDT es valioso ya que da a conocer el efecto del **tiempo** y el **riesgo** en tales decisiones
- Ejemplos:

Decisión de Inversión	Decisión de Financiamiento
Carrera Profesional	Crédito Universitario
Plantación y tala de un bosque de pinos	Aumento de Capital Propio
Obras de Beneficiencia	Aporte de los socios
Lanzar un nuevo producto	Capitalización de utilidades
Mejoramiento de una carretera	Impuestos

- Algunos **Principios Económicos – Financieros**
 - “ Un dólar hoy vale más que un dólar mañana bajo la premisa de que hoy puedo invertir ese dólar para generar intereses”
 - “ Un dólar seguro vale más que uno con riesgo” (no todas las inversiones tienen el mismo nivel de riesgo. Debemos comparar con alternativas de similar riesgo. Ej. Bonos del Banco Central v/s proyectos inmobiliarios

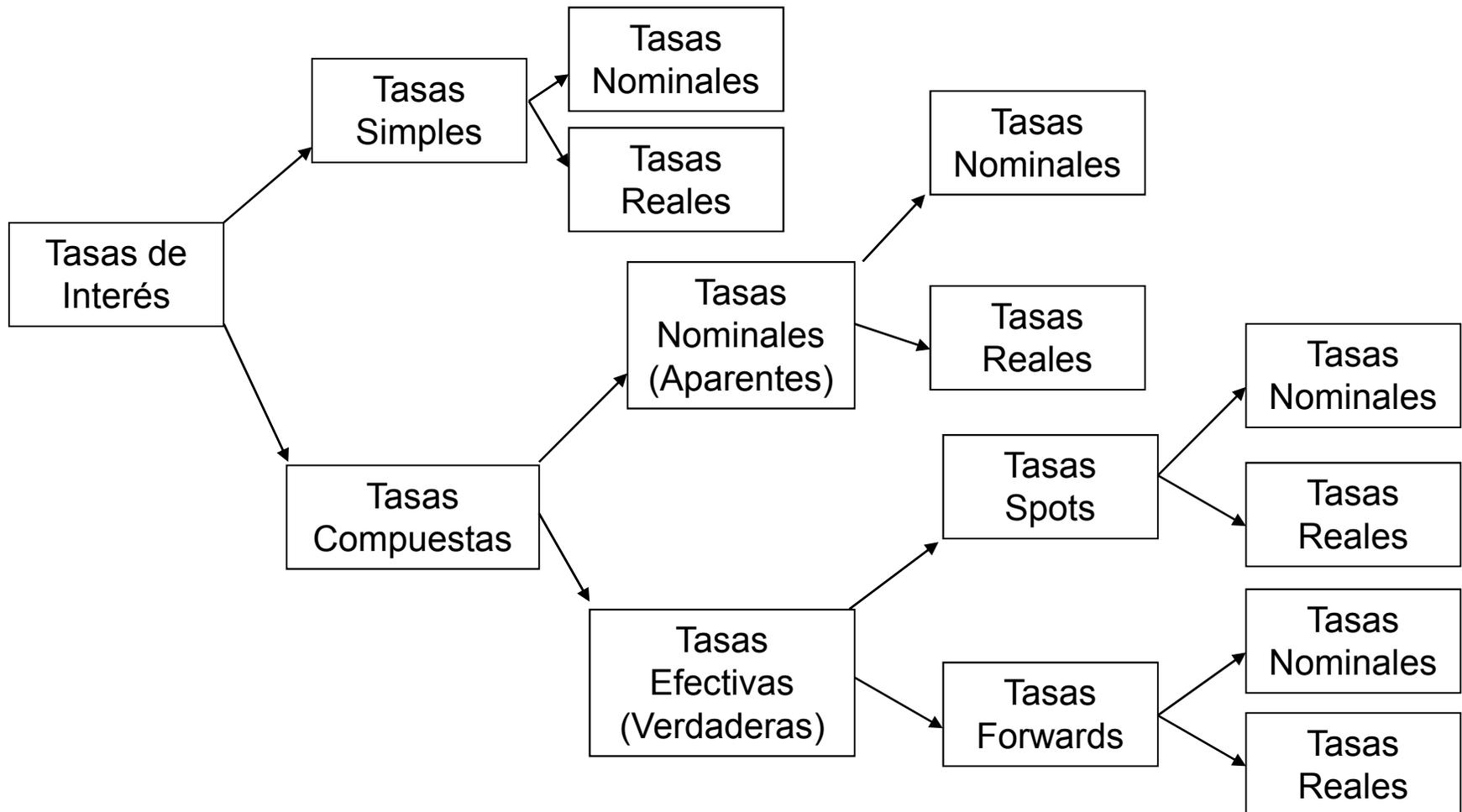
Tasas de Interés

Definiciones:

- Interés (si se invierte) = Monto actual – Inversión Original
- Interés (si se pide prestado) = Monto debido actualmente - Préstamo Original
- Tasa de Interés: el interés se expresa como un porcentaje (%) de la suma original por unidad de tiempo
- Período de Interés es la unidad de tiempo de la tasa de interés
- Ejemplo: una empresa invirtió \$100.000 y obtuvo un total de \$106.000 exactamente un año más tarde:
 - Interés = \$106.000 (monto actual) - \$100.000 (inversión original) = \$6.000
 - Tasa de Interés = \$6.000 (interés) / \$100.000 (suma original) = 6% anual
 - Período de interés = anual

Tasas de Interés

- Clasificación general de las Tasas de Interés:



2. Tasas de Interés Simples y Compuestas

◆ Interés simple

Principio: intereses no generan intereses. Sólo el principal (inversión o préstamo) genera intereses. De otra forma, es aquel que no considera reinversión de los intereses ganados en períodos intermedios.

$$T = 0, VP = \$100 \text{ e } i = 10\% \text{ anual}$$

$$T = 1, VF_1 = VP + VP * i = \$110$$

$T = 2, VF_2 = VF_1 + VP * i$ (Observemos que sólo calculamos intereses sobre el principal original).

$$VF_2 = VP + VP * i + VP * i = VP + 2 * VP * i = 120$$

Para n períodos:

$$T = n, VF_n = VP + n * VP * i \implies \mathbf{VF_n = VP * (1 + n * i)}$$

- **Interés Compuesto**

Principio: Intereses si generan intereses. El principal original más los intereses generan intereses. De otra forma, se asume reinversión de los intereses obtenidos en periodos previos.

Supongamos que $T = 0$, $VP = \$100$ e $i = 10\%$ anual:

$$T = 1, VF_1 = VP + VP * i = 110$$

$T = 2$, $VF_2 = VF_1 + VF_1 * i$ Observemos ahora calculamos intereses sobre el principal original más los intereses generados en el año 1

$$VF_2 = VP + VP * i + VP * i + VP * i^2$$

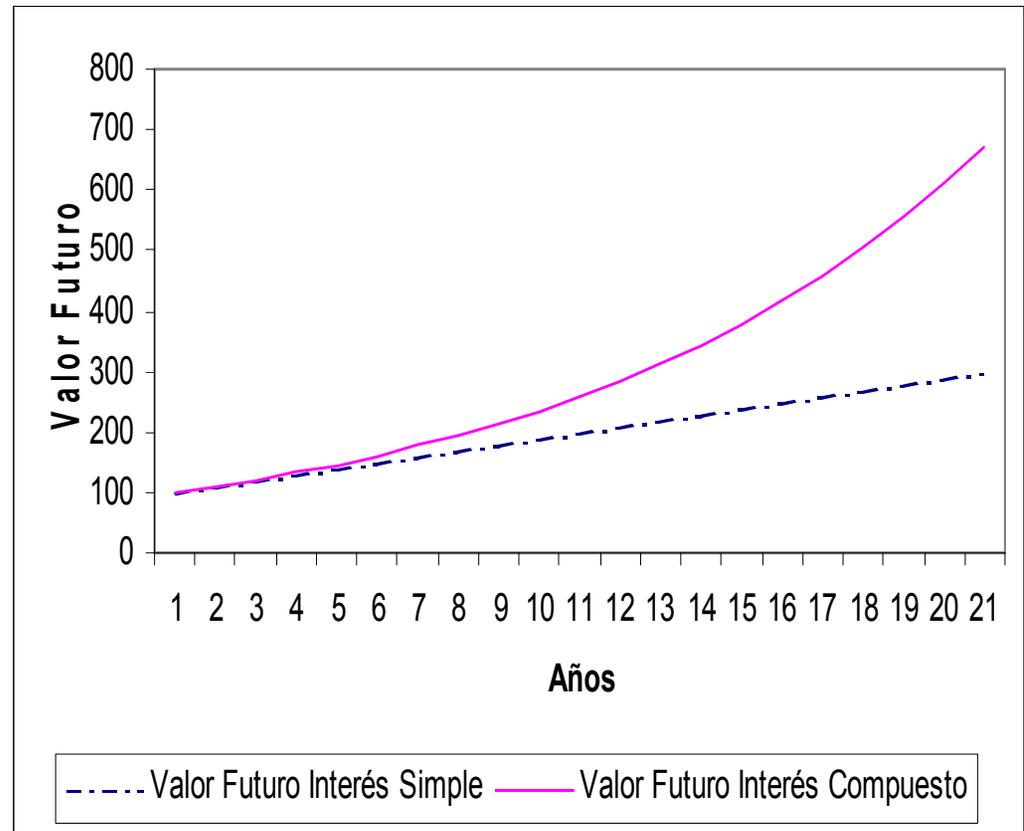
$$VF_2 = VP * (1 + i)^2 = 121$$

Para n períodos:

$$VF_n = VF_{n-1} + VF_{n-1} * i \implies \mathbf{VF_n = VP * (1 + i)^n}$$

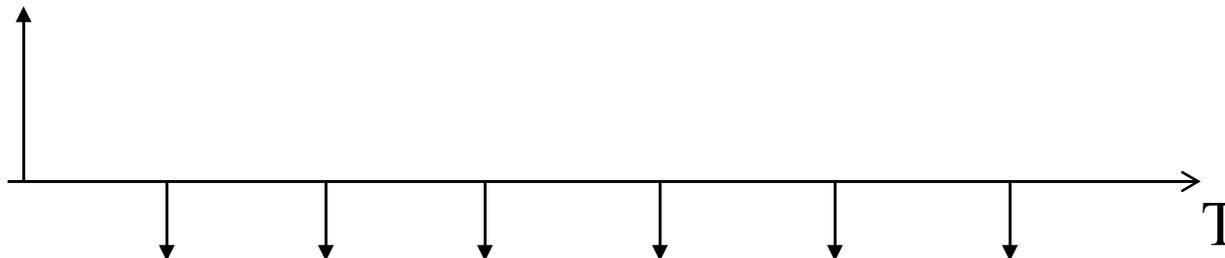
- Ejemplo

Período	Valor Futuro Interés Simple 10% anual	Valor Futuro Interés Compuesto 10% anual
0	100	100
1	110	110
2	120	121
3	130	133
4	140	146
5	150	161
6	160	177
7	170	195
8	180	214
9	190	236
10	200	259
11	210	285
12	220	314
13	230	345
14	240	380
15	250	418
16	260	459
17	270	505
18	280	556
19	290	612
20	300	673

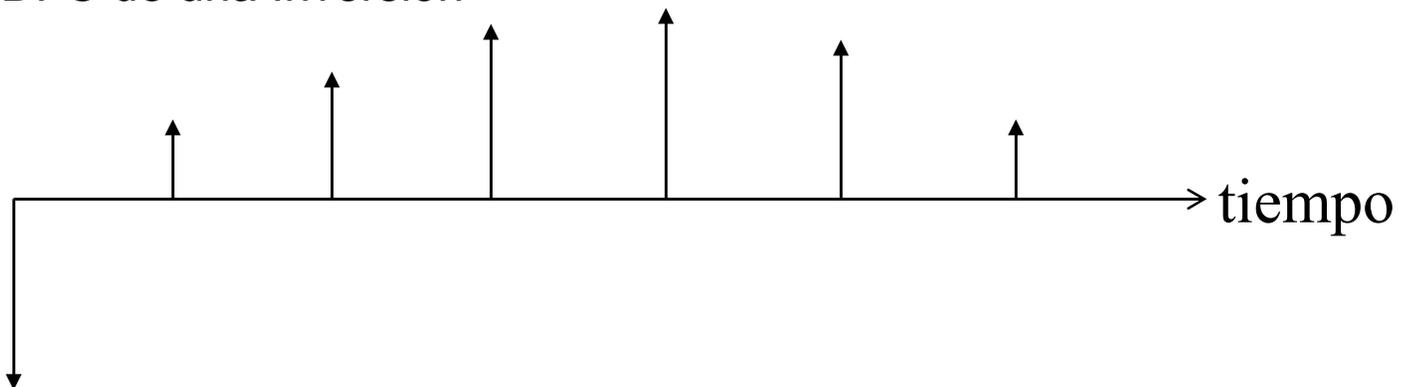


3. Diagrama Flujo de Caja (DFC)

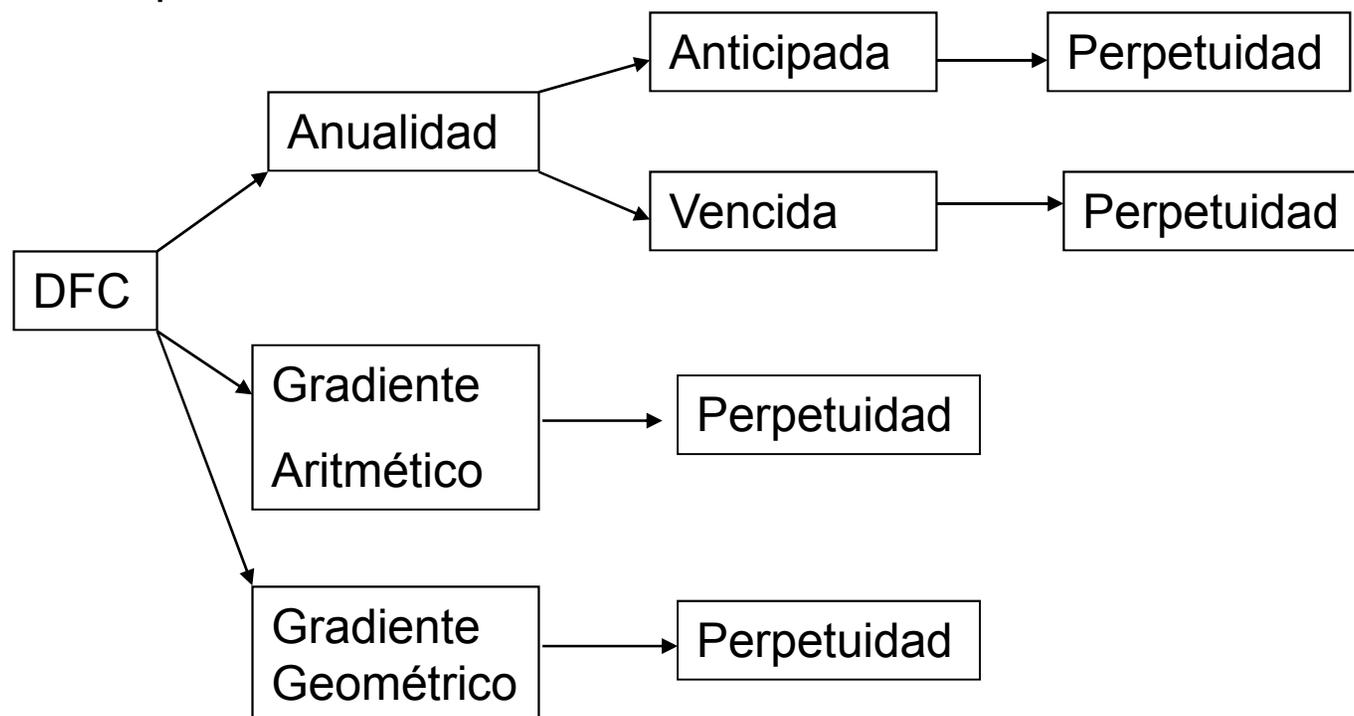
- Definición: DFC es un horizonte de tiempo en el cual se registran ingresos y egresos de dinero justo en el momento en que ocurren. Su utilidad es que nos permite hacer equivalencias entre valores presentes y valores futuros en cualquier instante de tiempo. Convenciones:
 - Una flecha hacia abajo es un egreso efectivo de dinero (E)
 - Una flecha hacia arriba es un ingreso efectivo de dinero (I)
 - Se asume que los ingresos y egresos efectivos de dinero son vencidos (al final del período) salvo que se diga lo contrario (anticipados)
 - Flujo de Caja Neto $t = I_t - E_t$
- Ejemplos
 - DFC de un Crédito



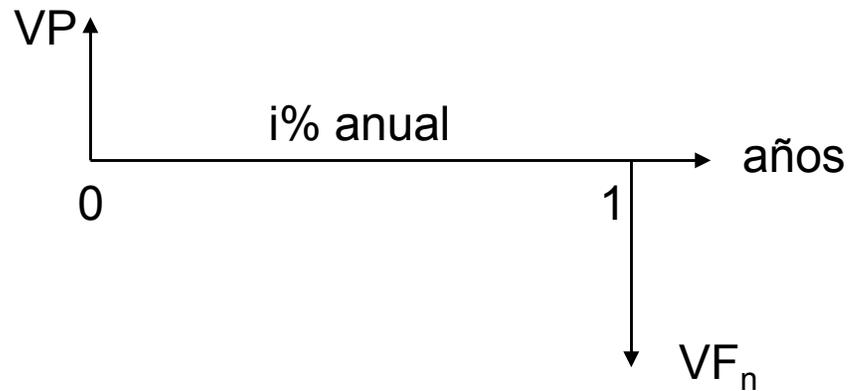
- DFC de una Inversión



- DFC Típicos



- Ejemplo: préstamo a un año



$$VF_n = VP * (1 + i)^n \longrightarrow \text{Capitalizar o devengar intereses}$$

$$VP = VF_n / (1 + i)^n \longrightarrow \text{Actualizar o descontar intereses}$$

4. Tasas Efectivas v/s Nominales

- Normalmente cuando se invierte o se pide prestado lo habitual es que se entregue el valor de una tasa que tiene un período que puede ser anual, semestral, trimestral, etc. y éste es el período de la tasa (**pt**)
- La inversión o préstamo puede capitalizar o devengar intereses más de una vez en el **pt**
- El período en el cual se capitalizan los intereses se denomina período de capitalización (**pc**)
- **Si pt es igual a pc**, estamos frente a una **tasa efectiva o verdadera**. Ejemplo: $i = 10\%$ anual (pt) capitalizable anualmente (pc). En este caso, como $pt = pc$ el pc se obvia y la tasa se menciona como $i = 10\%$ anual.

$$VP = 100$$

$$VF_n = VP * (1 + i)^n$$

$$VF_{1 \text{ año}} = 100 * (1 + 0.1) = 110$$

$$10 \text{ (intereses)} / 100 \text{ (suma original)} = 10\% \text{ anual (tasa efectiva)}$$

- **Si i_{pt} es mayor que i_{pc} , estamos frente a una tasa nominal o aparente. Ejemplo: $i = 10\%$ anual capitalizable semestralmente.** En este caso, la tasa efectiva asociada a la tasa nominal que se informó es mayor a un 10% anual.

$$VP = 100$$

$$VF_{6 \text{ meses}} = 100 * (1 + 10\% / 2) = 105$$

$$VF_{1 \text{ año}} = 105 * (1 + 5\%) = 110.25$$

$$10,25 \text{ (intereses)} / 100 \text{ (suma original)} = 10,25 \% \text{ anual (tasa efectiva)}$$

- En este caso, la tasa efectiva o verdadera (10,25 % anual) es mayor que la tasa nominal informada (10 % anual capitalizable semestralmente)
- **Importante:** todas las ecuaciones del valor del dinero en el tiempo utilizan tasas efectivas. Por lo tanto, debemos transformar las tasas nominales que informa el mercado en tasas efectivas y esto lo podemos hacer a través de la siguiente ecuación:

$$(1 + i_{pt}) = (1 + j / m)^m$$

Donde:

j = tasa nominal (10% anual capitalizable semestralmente)

m = n° de veces que se capitaliza la tasa nominal en el pt (2 veces)

j / m = tasa efectiva del pc (5% semestral)

i_{pt} = tasa efectiva del pt (10, 25% anual)

- Conclusión: mientras más veces se capitaliza la tasa nominal en el pt, la tasa efectiva asociada a esta tasa nominal es cada vez mayor. El caso extremo es cuando se capitalizan intereses segundo a segundo (capitalización continua, m tiende a infinito). Ejemplo: hay proyectos en que el stock de riqueza invertida crece instante a instante, entre ellos podemos mencionar la engorda de animales, el añejamiento de vinos, la crianza de aves, los proyectos forestales, etc.
- En este caso, $j = 10\%$ anual capitalizable continuamente, m tiende a infinito y la ecuación para encontrar i_{pt} es

$$i_{pt} = e^j - 1$$

$$i_{anual} = e^{0.1} - 1 = 10,51\% \text{ anual}$$

- La ecuación anterior tiene otra utilidad: “ nos permite establecer equivalencias entre tasa de interés efectivas de distintos períodos”.
- Ejemplos:

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{365}$$

- En nuestro ejercicio en que $j = 10\%$ anual capitalizable semestralmente lo que hicimos fue lo siguiente:

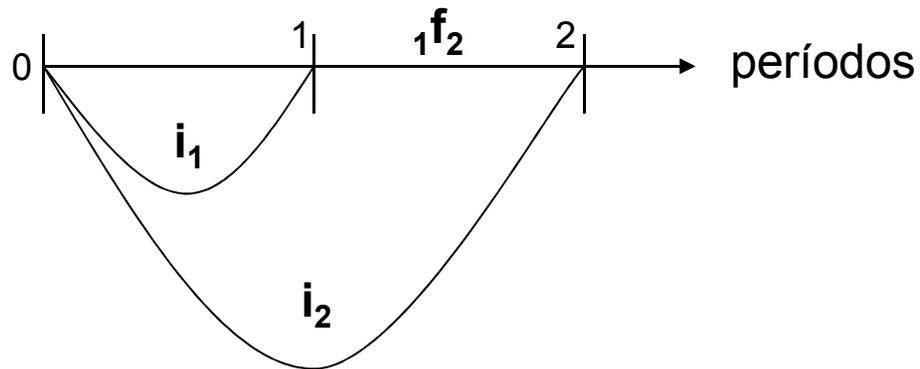
$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2$$

$$(1 + i_a) = (1 + 0.05)^2$$

$$i_a = 10,25\% \text{ (tasa efectiva)}$$

5. Tasas Spots y Forwards

- Tasa **spot** es aquella tasa conocida e informada en el mercado al día de hoy
- Tasa **forward** es una tasa de interés a futuro no observable ni informada directamente en el mercado, pero que se puede calcular a partir de las tasas spots
- Ambas tasas tienen que ser efectivas
- Lo que se desea conocer con esta nueva distinción de tasas es la estructura temporal de las tasas de interés. No es lo mismo invertir a un año plazo que invertir a 10 años. Lo mismo para un préstamo.
- Siempre que se quiera calcular tasas forwards a partir de tasas spots, éstas deben llevarse a un período en común (por ejemplo: mensual, trimestral, etc.)



- i_1 = tasa spot a un periodo
- i_2 = tasa spot a 2 períodos
- ${}_1f_2$ = tasa forward a un período dentro de un período

$$\text{Se cumple } (1 + i_1) * (1 + {}_1f_2) = (1 + i_2)^2$$

- Recordar que i_2 hay que llevarlo al mismo período de i_1 y ${}_1f_2$. Por esto, $(1 + i_2)$ en la formula anterior está elevado al cuadrado

7. Tabla de Pago de Créditos

- Cuando se solicita un crédito y nos lo otorga cualquier institución financiera, adquirimos el compromiso a pagar intereses (costo del préstamo) y a devolver lo que nos prestaron (esto último se denomina amortización del préstamo)
- Cuota = amortización + intereses (siempre se cancelan primero los intereses y luego se amortiza el préstamo)
- En la evaluación privada de proyectos los intereses son un costo del proyecto financiado y se reconocen como un egreso en el flujo de caja operacional antes de impuesto. La amortización del préstamo es un flujo de caja de capitales y se reconoce como un egreso.
- En la evaluación social de proyectos los flujos asociados a la deuda (préstamo, intereses, ahorro de impuestos y amortizaciones) no son relevantes ya que es sólo una transferencia de recursos dentro del mismo sistema (Sociedad Chilena). La excepción es un préstamo desde fuera de Chile.
- Dependiendo del sistema o forma de pago, los créditos se clasifican en:
 - Cuotas iguales (aquí debemos recordar la fórmula de anualidad)
 - Amortizaciones iguales
 - Sólo se cancelan los intereses de cada período y se amortiza el total de la deuda en el último período del crédito.

- Veamos un ejemplo:

Prestamo hoy = \$ 1.000

n = 5 años

i = 10% anual

- a) Cuotas iguales (ej.: Créditos hipotecarios con una garantía real como segunda fuente de pago)

n	Préstamo	Intereses	Amortización	Cuota
0	1.000			
1	836	100	164	264
2	656	84	180	264
3	458	66	198	264
4	240	46	218	264
5	0	24	240	264

b) Amortizaciones Iguales (ej.: créditos agrícolas)

Monto Amortización anual = Préstamo / n = \$1.000 / 5 = 200

n	Préstamo	Intereses	Amortización	Cuota
0	1.000			
1	800	100	200	300
2	600	80	200	280
3	400	60	200	260
4	200	40	200	240
5	0	20	200	220

c) Sólo intereses por período y la amortización total del préstamo en el último período del préstamo (Ej: líneas de crédito, Bonos)

n	Préstamo	Intereses	Amortización	Cuota
0	1.000			
1	1.000	100	0	100
2	1.000	100	0	100
3	1.000	100	0	100
4	1.000	100	0	100
5	0	100	1.000	1.100

- Los ejemplos anteriores son clásicos. Se pueden dar otras formas de pago derivadas de las anteriores:
 - Tasa de interés variable
 - Períodos de gracia de amortizaciones (Ej.: créditos Corfo para estudios superiores)
 - Períodos de gracia de amortizaciones e intereses
 - Cancelación anticipada del crédito
 - Renegociaciones
- En la evaluación privada de proyectos y específicamente en el proyecto financiado, los préstamos tienen impacto vía ahorro de impuestos. No obstante, el sistema de pago a elegir va a depender de los flujos del proyecto (capacidad de pago) y del impacto del préstamo en el VAN del proyecto (mejor indicador de rentabilidad, lo verán más adelante).