UNIVERSIDAD DE CHILE
DIPLOMA PREPARACIÓN Y EVALUACIÓN SOCIAL DE PROYECTOS

Matrices y Sistemas de ecuaciones lineales

Material realizado por Sara Arancibia e Isabel Arratia

Matrices

Muchos problemas prácticos se resuelven manejando los datos asociados a los problemas con operaciones matemáticas. Al organizar los datos en forma adecuada como bloques de números, es posible efectuar estas operaciones con orden y eficiencia.
Considérese la forma de organizar los datos de producción mensual de un fabricante. La producción de mayo se resume en la tabla 1.

	Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo D
Panta I	320	280	460	280
Planta II	480	360	580	0
Planta III	540	420	200	880

$$\begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix}$$

Matriz que resume los datos de la tabla 1.

El álgebra matricial permite 1) la expresión de un sistema complejo de ecuaciones en forma sucinta y simplificada, 2) proporciona un método abreviado para determinar si existe una solución, antes de tratar de obtenerla y 3) proporciona los medios para resolver los sistemas de ecuaciones. Sin embargo, el álgebra matricial *sólo* se puede aplicar a sistemas de ecuaciones lineales. Puesto que muchas relaciones económicas se pueden plantear aproximadamente mediante ecuaciones lineales y otras se pueden transformar en relaciones lineales, esta limitación no representa en general una dificultad grave.

Ejemplo 1. Para una compañía con varias tiendas distintas, que venden varios productos diferentes, una matriz proporciona un medio conciso para mantenerse al tanto de las existencias.

Tienda	Esquís	Palos	Lazos o sogas	Trajes
1	120	110	90	150
2	200	180	210	110
3	175	190	160	80
4	140	170	180	140

Al leer una fila de la matriz, la empresa puede determinar el nivel de las existencias en cualquiera de sus tiendas.
Al leer una columna de la matriz, la empresa puede determinar las existencias de cualquiera de sus líneas de productos.

Matrices: definiciones y notaciones básicas

Una matriz A con componentes en IR es un arreglo en filas y columnas de elementos de IR .

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \sqrt{2} & -1 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2/3 \\ 15 & -3 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$$

A y B son matrices con componentes en IR , el cuerpo de los números reales. La matriz A tiene dos filas y tres columnas mientras que la matriz B tiene tres filas y dos columnas.

Si una matriz tiene m filas y n columnas, se dice que ella es de **orden m x n** (se lee m por n).

¿Cómo denotar una matriz de orden m x n?

Se usan dos índices:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

lo que abreviadamente se expresa,

$$A=(a_{ij}),\ i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n$$

El elemento a_{ij} es el que se ubica en la i-ésima fila j-ésima columna de la matriz A; se llama **componente** ij de la matriz A.

Si la matriz A tiene el mismo número n de filas que de columnas, se dice que ella es una **matriz cuadrada de orden n**.

Si A es una matriz de orden n, las componentes a_{ii} constituyen la **diagonal de A**; se anota:

$$\text{diag}(A)=(a_{11},\ a_{22},\ \ldots\ldots,a_{nn})$$

La suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada de orden n se llama **traza de A**, es decir,

$$\text{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ se dice **matriz diagonal** si $a_{ij}=0$ cuando $i\neq j$. Por ejemplo,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ son matrices diagonales.

Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ se llama **triangular superior** si $a_{ij}=0$ para i > j, y se llama **triangular inferior** si $a_{ij}=0$ para i < j. Por ejemplo,

$$C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$ son matrices triangulares.

El conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas con componentes en el cuerpo IR será denotado $M_{mxn}(IR)$ por $M_n(IR)$ y será cuando se trate de matrices cuadradas de orden n.

Dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son **iguales** si tienen el mismo orden y además $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i\, j$.

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz de orden m x n, la **transpuesta de A**, denotada por A^t, es la matriz de orden n x m que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas de A. En consecuencia,

$$A^t=(a_{ji})$$

Sea $A=(a_{ij})$ matriz cuadrada. Se dice que A es una **matriz simétrica** si $A^t=A$ y se dice que A es **antisimétrica si** $A^t=-A$, donde -A es la matriz $-A=(-a_{ij})$.

Por ejemplo, $A=\begin{pmatrix}6&-1&4\\-1&7&2\\4&2&-3\end{pmatrix}$ es una matriz simétrica.

Construya usted una matriz antisimétrica de orden 3.

Operaciones con matrices

Se llama **matriz nula (o matriz cero) de orden m x n** a la matriz de orden m x n que tiene todas sus componentes iguales a $0\in IR$ La matriz nula se denotará por O_{mxn} o simplemente O.

Suma de matrices

Si $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in M_{mxn}(IR)$, la suma de A y B es la matriz $A+B=(c_{ij})\in M_{mxn}(IR)$, donde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

Por ejemplo, si

$$A=\begin{pmatrix}-4&12\\6&-5\\1&3\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}7&-9\\-2&6\\-8&-4\end{pmatrix}, \quad A+B=\begin{pmatrix}3&3\\4&1\\-7&-1\end{pmatrix}$$

Observe que para sumar matrices, ellas deben ser del mismo orden. Se tienen las siguientes propiedades:

1. (A+B)+C = A+(B+C), $\forall A,B,C\in M_{mxn}(IR)$
2. A+B = B+A, $\forall A,B\in M_{mxn}(IR)$
3. Existe O_{mxn}, matriz nula, tal que A+O = A, $\forall A\in M_{mxn}(\kappa)$
4. Para cada matriz $A\in M_{mxn}(IR)$, existe $-A\in M_{mxn}(IR)$ tal que
   $A=(a_{ij})$ $-A=(-a_{ij})$ $\forall A,B\in M_n(\kappa)$
   A+(-A) = O, donde $\forall A,B\in M_n(\kappa)$
5. tr(A+B) = tr(A) + tr(B) $\forall A,B\in M_{mxn}(\kappa)$
   $(A+B)^t=A^t+B^t$

Multiplicación por escalar o ponderación

Si $A=(a_{ij}) \in M_{mxn}(\kappa)$ y $\alpha \in \kappa$, la multiplicación α veces A es la matriz de orden m x n, $\alpha A=(\alpha \cdot a_{ij})$

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 4 & 12 \\ -6 & 20 \end{pmatrix}$, entonces $\frac{1}{3}A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ \frac{4}{3} & 4 \\ -2 & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$

Se puede establecer que:

1. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A, \ \forall \alpha,\beta \in \kappa, \ \forall A$ matriz
2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A, \ \forall \alpha,\beta \in \kappa, \ \forall A,B \in M_{mxn}(\kappa)$
3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, \ \forall \alpha \in \kappa, \ \forall A,B \in M_{mxn}(\kappa)$
4. $1 \cdot A=A, \quad (-1)A=-A, \quad 0 \cdot A=O, \ \forall A$ matriz

Además

5. $tr(\alpha A)=\alpha \cdot tr(A), \ \forall A \in M_n(\kappa)$
6. $(\alpha A)^t=\alpha \cdot A^t, \forall A \in M_{mxn}(\kappa)$

Las propiedades algebraicas de las matrices nos permiten resolver ecuaciones matriciales de manera eficiente.

Ejercicio: Resuelva la ecuación

$$5(X+A)=A^t-\frac{1}{3}(B-9X^t)^t$$

si

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \ B=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad X^t=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema: Un fabricante produce tres modelos de zapatillas de descanso A, B y C en tres tamaños: para niños, damas y caballeros. La fabricación se realiza en dos plantas, una ubicada en San Bernardo y la otra en Maipú. La producción semanal, en pares de zapatillas, en cada planta se entrega a través de las matrices:

San Bdo.	Niños	Damas	Varones
A	20	34	30
B	16	20	48
C	24	28	32

Maipú	Niños	Damas	Varones
A	16	24	26
B	10	14	32
C	15	20	28

a) Determine la matriz que contiene los datos relativos a la producción semanal total de cada modelo de zapatilla en ambas plantas.

b) Si la producción en la planta de San Bernardo se incrementa en un 20% y la de Maipú en un 40%, escriba la matriz que representa la nueva producción semanal total de cada tipo de zapatilla.

La Multiplicación de Matrices

Si $A=(a_{ij}) \in M_{mxn}(\kappa)$ y $B=(b_{ij}) \in M_{nxr}(\kappa)$, la multiplicación de A y B es la matriz $AB=(c_{ij})$, de orden m x r, donde

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

El elemento ubicado en la fila i columna j del producto AB es:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots..+a_{in}b_{nj}$$

Componentes de la fila i

Componentes de la columna j

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}8 & -2 & -5\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

entonces $AB=\begin{pmatrix}15 & -16\\ 9 & -7\end{pmatrix}$

Observe que en este ejemplo, BA también se puede realizar pero es una matriz de orden 3, con lo que concluimos que

La multiplicación de matrices no es conmutativa

Note también que para la matriz A del ejemplo anterior, el producto $A^2 = A \cdot A$ no se puede efectuar.

¿Este producto tiene otras "curiosidades"?

- Existen matrices cuadradas A, no nulas pero tales que $A^2 = O$
- Más aún, existen matrices A y B, de orden n, no nulas, distintas y AB = O, es decir, el producto de dos matrices puede ser la matriz cero y ninguna de ellas ser cero.

Por lo tanto,

$$AB=0 \not\Rightarrow (A=0 \vee B=0)$$

$$AB=AC \not\Rightarrow B=C$$

Sin embargo, siempre que las operaciones se puedan realizar, se puede demostrar que:

1. (A B) C = A (B C)
2. (A + B) C = A C + B C y C (A + B) = C A + CB

Surge la interrogante ¿Existe elemento identidad en el conjunto $M_{mxn}(IR)$?

La matriz cuadrada $I_n = (a_{ij})$ de orden n definida así:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

se llama matriz identidad; ella es tal que

$$A \cdot I_n = A = I_n \cdot A, \quad \forall A \in M_n(\kappa)$$

Ejercicio

Una cadena de tiendas vende 1000 hamburguesas, 600 quesadillas y 1200 malteadas a la semana. El precio de una hamburguesa es de 45 centavos, el de una quesadilla de 60 centavos y el de una malteada de 50 centavos. El costo de una hamburguesa para la cadena es de 38 centavos, el de una quesadilla 42 centavos y el de una malteada de 32 centavos. Determínese los beneficios de la empresa durante la semana, utilizando *a)* conceptos totales y *b)* análisis por unidades para demostrar que la multiplicación matricial es distributiva.

a) La cantidad de productos vendidos *(Q),* el precio de venta de los artículos *(P)* y el costo de los productos *(C)* se pueden representar en forma matricial:

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.60 \\ 0.50 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.42 \\ 0.32 \end{bmatrix}$$

Los ingresos totales (YT) son:

$$YT = PQ = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.60 \\ 0.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

que no es definido tal y como se da. Al tomar la transposición de P o Q se lograra que los vectores sean conformables para la multiplicación. Obsérvese que el orden de la multiplicación es muy importante. La multiplicación de vectores de hilera (P'Q o Q'P) producirá el escalar que se requiere; la multiplicación de hilera por vector (PQ' o QP') producirá una matriz (3x3) que no tendrá significado en economía. Así pues, al tomar la transposición de P y premultiplicar, se obtiene:

$$YT = P'Q = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.60 & 0.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

En donde P'Q es definido. (1 x 3) = (3 x 1) Se produce una matriz (1x1) o escalar.

$$YT = \left[0.45(1000) + 0.60(600) + 0.50(1200)\right] = 1410$$

De modo similar , el costo total (CT) es CT = C'Q

$$CT = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.42 & 0.32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix} = \left[0.38(1000) + 0.42(600) + 0.32(1200)\right] = 1016$$

Por tanto, los beneficios son:

$$\Pi = YT - CT = 1410 - 1016 = 394$$

b) Mediante el análisis por unidad, los beneficios por unidad (U) son:

$$U = P - C = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.60 \\ 0.50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.42 \\ 0.32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.18 \\ 0.18 \end{bmatrix}$$

Los beneficios totales (Π) son los beneficios por unidad el número de unidades vendidas

$$\Pi = UQ = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.18 \\ 0.18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

que es indefinido. Al tomar la transposición de U,

$$\Pi = U' = \begin{bmatrix} 0.07 & 0.18 & 0.18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

$$= \left[0.07(1000) + 0.18(600) + 0.18(1200)\right] = 394 \qquad \text{Q.E.D.}$$

En consecuencia, existe elemento identidad en $M_n(IR)$.

Ejercicio: a) Muestre con ejemplos que, en general,

$$\mathrm{tr}(AB) \neq \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) \quad \text{y que} \quad (AB)^t \neq A^t B^t$$

Propiedad

siempre que los productos se puedan realizar,

$(A\,B)^t = B^t A^t$. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Ejercicio: Determine la matriz X de modo que la siguiente igualdad resulte verdadera:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices A y B, ¿qué necesitamos para resolver la ecuación AX = B?

La ecuación ax = b, en el conjunto de los números reales, se resuelve usando el inverso multiplicativo de a:

$$x = a^{-1}b = \frac{b}{a}$$

Si A es una matriz no nula nos preguntamos ¿existe una matriz B tal que AB = I_n = BA? Que equivale a ¿existe el inverso multiplicativo de A? Observe que esta pregunta tiene sentido sólo si A es una matriz cuadrada. Sin embargo, aunque A sea cuadrada, la respuesta a la interrogante es no siempre.

Por ejemplo para $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ investiguemos la existencia de tal matriz B.

Supongamos que $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es tal que AB = I_2; entonces

$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que equivale a $\begin{pmatrix} 3a+6c & 3b+6d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y a resolver $a + 2c = \frac{1}{3}$ y $a + 2c = 0$

Concluimos que no existen a y c; de manera análoga, no existen b y d. Por lo tanto la matriz B no existe.

Surge entonces la siguiente definición:

> Se dice que una matriz $A \in M_n(IR)$ es **invertible o no singular** si existe $B \in M_n(IR)$ tal que AB = I_n = BA. La matriz B, cuando existe, está únicamente determinada por A, se llama **inversa de A** y se denota por A^{-1}.

Por lo tanto, $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$

Propiedades:

a) $(A^{-1})^{-1} = A, \quad \forall A \in M_n(\kappa)$ invertible

b) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \quad \forall A \in M_n(\kappa)$ invertible

c) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \quad \forall A, B \in M_n(\kappa)$ invertibles

¿Cuáles matrices son invertibles?

En lo que sigue, trataremos de contestar esta interrogante, es decir, caracterizaremos a las matrices invertibles. Además mostraremos maneras de calcular la inversa.

Una primera respuesta la obtendremos a través de los determinantes que comenzaremos a estudiar a continuación.

Determinantes

Asociado a cada matriz $A \in M_n(\kappa)$ existe un elemento de κ, su determinante, que lo denotaremos det(A) o | A | .

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\kappa)$, det(A) = ad – bc ; por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5$$

Si A es una matriz cuadrada de orden mayor que 2, el determinante de A se define en forma recursiva como sigue:

Sea $A = (a_{ij})$ matriz de orden n. Llamaremos **menor de orden ij** de A, y anotaremos M_{ij} , al determinante de orden n - 1 que se obtiene a partir de A, eliminándole la i-ésima fila y la j-ésima columna.

El **cofactor de orden ij** de A, denotado C_{ij} es el número

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$, $M_{13} = 2$, $M_{32} = 1$

$$C_{13} = 2 \quad \text{y} \quad C_{32} = -1$$

El **determinante de la matriz de orden n,** $A = (a_{ij})$ es el número

$$\det(A) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{con} \quad 1 \le j \le n \quad \text{fijo} \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{con} \quad 1 \le i \le n \quad \text{fijo} \end{cases}$$

Por ejemplo, calculemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Fijando i = 1 tenemos que:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = M_{11} - 3M_{12} - 9M_{13} = -20 - 12 + 72 = 40$$

- Observe que el fijar i = 1 significó que al desarrollar la sumatoria intervinieron los elementos y los correspondientes menores (o cofactores) de la fila 1.
- El determinante det(A) = 40 se pudo haber obtenido por seis caminos diferentes. ¿Cuál de ellos es el que necesita menos cálculos?

De la definición dada para los determinantes siguen las siguientes **propiedades**:

1. det(A) = det(A^t). En consecuencia, las propiedades de los determinantes demostradas para las filas, son también válidas para las columnas. Y recíprocamente.
2. Si todos los elementos de una fila (o columna) de la matriz A son cero, det(A) = 0.
3. det(I_n) = 1, $\forall n \in IN$. En efecto, es claro que det(I_2) = 1. Supongamos que det(I_k) = 1, para $k \in IN$. Entonces,

$$\det(I_{k+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det(I_k) = 1$$

Del mismo modo, usando un razonamiento inductivo, podemos establecer que

4. Si A es una matriz diagonal o triangular, det(A) es igual al producto de los elementos de la diagonal.
5. Si dos filas (o columnas) adyacentes de A son iguales, entonces det(A) = 0.

   Esta propiedad nos permite demostrar que:

6. Si dos filas adyacentes o columnas adyacentes de A se intercambian, se produce un cambio de signo del determinante.

   Lo que nos permite ampliar la propiedad 5:

7. Si dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces det(A) es igual a 0.

¿Qué sucede con el determinante de A+B?

En general, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Sin embargo, existe una propiedad que la enunciaremos en primer lugar para uno de los casos de orden 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b \\ a_2 + c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$$

8. Si $A \in M_n(\kappa)$ y $A^{(k)}$, $1 \leq k \leq n$, denota la k-ésima columna de A, entonces

$$\det(A^{(1)}, \ldots, A_1^{(k)} + A_2^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) =$$
$$\det(A^{(1)}, \ldots, A_1^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) + \det(A^{(1)}, \ldots, A_2^{(k)}, \ldots, A^{(n)})$$

Respecto a la ponderación, en general,

$$\det(\alpha A) \neq \alpha \cdot \det(A)$$

Pero, utilizando la notación de la propiedad 8, se tiene que

9. $\det(A^{(1)}, \ldots, \alpha A^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) = \alpha \det(A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}, \ldots, A^{(n)})$

   Y como consecuencia, $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

10. Si A y B son matrices de orden n, se puede demostrar que

    det (A B) = det(A) det(B)

11. Finalmente una propiedad que será de mucha utilidad:
    Si las componentes de una fila (o columna) de A se multiplican por un número $\alpha \in \kappa$ y los resultados se suman a los elementos correspondientes de otra fila (o columna), el valor del determinante no se altera. Es decir,

$$\det(A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}, \ldots, A^{(j)} + \alpha A^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) = \det(A)$$

¿Cómo utilizar la propiedad 11 anterior?

Si la fila i multiplicada por el número α la sumamos a la fila j, anotaremos $\alpha F_i + F_j$

Para calcular el siguiente determinante usaremos la operación $-2F_1+F_2$; a continuación la operación $-4F_1+F_3$ y luego desarrollaremos el determinante a través de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 4 & -12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 19$$

Definición: La matriz **adjunta** de $A=(a_{ij}) \in M_n(\kappa)$, es la transpuesta de la matriz de los cofactores de A, es decir,

$$\text{adj}(A) = ((-1)^{i+j} M_{ij})^t = (C_{ij})^t = (C_{ji})$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$, $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

¿Cuál es la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? La matriz de los cofactores de A es $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -6 & -12 & 6 \end{pmatrix}$; luego $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 9 & 2 & -12 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

Observe que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$,

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad \text{adj}(A) \cdot A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Y si el determinante de A es distinto de cero tenemos que,

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right) = I_2 = \left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right) \cdot A$$

Este resultado es más general; se puede demostrar que si $A \in M_n(\kappa)$ y det(A) es distinto de cero, entonces

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right) = I_n = \left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right) \cdot A$$

es decir, A es invertible y se tiene que $A^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right)$

Recíprocamente, si A es invertible, entonces

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

y por lo tanto, $\det(A) \neq 0$.

Por lo tanto, podemos enunciar el siguiente teorema que caracteriza a las matrices invertibles:

Ejemplo . Para obtener la inversa de $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

1. Se comprueba que se trata de una matriz cuadrada, en este caso 3 x 3, porque sólo las matrices cuadradas pueden tener inversas.
2. Se evalúa la determinante con el fin de asegurarse de que $|A| \neq 0$, puesto que solo las matrices no singulares pueden tener inversas.

$$|A| = 4[3(4)-(-1)(1)]-1[(-2)(4)-3(1)]+(-5)[(-2)(-1)-3(3)]$$
$$= 52+11+35 = 98 \neq 0$$

3. Se determina la matriz de cofactor de A,

$$C=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

Luego, se traspone la matriz de cofactor para obtener la matriz adjunta

$$\text{Adj} \quad A = C' = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

4. Se multiplica la matriz adjunta por $1/|A| = \frac{1}{98}$ para obtener A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{6}{98} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

5. Para verificar si respuesta, se multiplica $AA^{-1} o A^{-1}A$. Los dos productos serán iguales a ***I*** si la respuesta es correcta.

Ejemplo . Resolver

$$4x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$$

En primero lugar, expresemos el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

Puesto que A^{-1} se determinó ya en el ejemplo anterior,

$$X = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{6}{98} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{104}{98}+\frac{12}{98}+\frac{80}{98} \\ \frac{88}{98}+\frac{372}{98}+\frac{30}{98} \\ -\frac{8}{14}+\frac{12}{14}+\frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{196}{98} \\ \frac{490}{98} \\ \frac{14}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$x_1 = 2, x_2 = 5 \text{ y } x_3 = 1.$$

Teorema: Sea $A \in M_n(\kappa)$; entonces

A invertible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Y en este caso se tiene que $A^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right)$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$, y $ad - bc \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Calcule la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales – Matrices escalonadas

Para una matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$ consideraremos las siguientes **"operaciones elementales con las filas de A"**:

- **Permutar dos filas**: Si se permuta la fila i con la fila j anotamos F_{ij}

- **Multiplicar una fila por un número real**: Si se multiplica la fila i por el número $\alpha \neq 0$, esta operación se anota αF_i

- **Sumar dos filas**: Si la fila i se suma a la fila j, anotamos $F_i + F_j$

- Finalmente, podemos combinar las dos últimas operaciones y obtener $\alpha F_i + F_j$

Ejercicio: Verifique que si se realizan las operaciones elementales indicadas con las filas de la matriz A, se obtiene la matriz E.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \; F_{12}, \; -2F_1 + F_2, \; F_1 + F_3, \; F_{23}, \; 2F_2 + F_3, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A, B \in M_{mxn}(\kappa)$ y si B se obtiene realizándole a la matriz A un número finito de operaciones elementales, entonces se dice que **A es equivalente a B** y se anota $\mathbf{A \approx B}$. Por ejemplo, las matrices A y E del ejercicio anterior son equivalentes.

La matriz E del ejercicio anterior tiene una forma muy particular, es una matriz del tipo escalonada. A continuación damos una definición de matriz escalonada:

Una matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$ se llama **matriz escalonada** si satisface las siguientes condiciones:

- Las filas que tengan todas sus componentes iguales a cero deben estar ubicadas debajo de aquellas que tengan componentes no nulas.
- La primera componente no nula de cada fila no nula es 1, vista de izquierda a derecha. Esta componente se llama "uno distinguido o uno capital".
- El número de ceros al comienzo de una fila aumenta a medida que se desciende en la matriz.

Si además A satisface lo siguiente:

- Todas las componentes de la columna donde aparece un 1 distinguido son ceros,

la matriz A se llama **escalonada reducida por filas**.

Sistemas de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se expresa

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots & \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

donde $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\Re)$ es la **matriz de los coeficientes** del sistema y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}$ son las (matrices) columnas de **incógnitas** y de **términos constantes** respectivamente.

Los números reales $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, formalmente $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$ que satisfacen cada una de las ecuaciones de (*) forman una **solución del sistema** (*).

El sistema (*) se dice **compatible** si posee al menos una solución y se dice **incompatible** cuando no tiene solución.

Observe que el sistema (*) equivale a la ecuación matricial AX = B, con A la matriz de orden m x n formada con los coeficientes del sistema, X la matriz columna de incógnitas y B la matriz columna de términos constantes.

Ejercicio: Escriba la ecuación matricial AX = B que representa a los sistemas:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_3 &= -1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 &= 0 \end{cases}$$

Ejercicio: Escriba el sistema de ecuaciones lineales AX = B que corresponde a las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales se dice **homogéneo** cuando la columna de términos constantes está formada sólo por ceros.

Sea AX = O, con $A \in M_{mn}(\Re)$ un sistema homogéneo; entonces:

1. AX = O es siempre compatible pues X = O es solución de él.
2. Si $E \in M_{mn}(\Re)$ es tal que $A \approx E$, entonces los sistemas (equivalentes) AX = O y EX = O tienen las mismas soluciones.
3. Si el rango de A, r(A) = n, entonces X = O es la única solución de AX = O.
4. Si el rango de A, r(A) < n, entonces existen infinitas soluciones para AX = O. Estas se pueden expresar en términos de uno o más parámetros.

Resolución de sistemas homogéneos

Ejemplo 1

$$\begin{array}{rcl} x_1+x_2-x_3 &=& 0 \\ 2x_1-2x_2+3x_3 &=& 0 \\ 3x_1+7x_2-x_3 &=& 0 \end{array}$$

La matriz de este sistema es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Con A, realizamos operaciones elementales fila hasta obtener E

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Como r(A) = 3 = N° columnas de A = N° de incógnitas, el sistema tiene solución única y ésta es la misma que tiene EX = O, es decir,

$S=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que nos permitimos escribir S = (0, 0, 0)

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{rcl} x_1+x_2-3x_3 &=& 0 \\ 2x_1-4x_2+6x_3 &=& 0 \\ -1x_1-7x_2+15x_3 &=& 0 \end{array}$$

En este caso:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & -7 & 15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

Como r(A) = 2 < N° columnas de A (N° de incógnitas), el sistema tiene infinitas soluciones. Estas las buscamos en el sistema EX = O:

$$\begin{array}{rcl} x_1-x_3 &=& 0 \\ x_2-2x_3 &=& 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& x_3 \\ x_2 &=& 2x_3 \end{array}$$

Asignamos a x_3 el parámetro λ con el fin de expresar las infinitas soluciones así:

$S=\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda;\ \lambda\in\Re.$ O también, S = (1, 2, 1) λ , $\lambda \in \Re$

Ejemplo 3: Resolvamos el sistema de 4 incógnitas:

$$\begin{array}{rcl} x-y+4z+5u &=& 0 \\ 2x+3y-7z &=& 0 \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -15 & -10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = E$$

En este caso, r(A) = 2 < N° columnas de A (N° de incógnitas) y el sistema tiene infinitas soluciones. El sistema equivalente EX = O es:

$$\begin{array}{rcl} x+z+3u &=& 0 \\ y-3z-2u &=& 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x &=& -z-3u \\ y &=& 3z+2u \end{array}$$

Asignamos dos parámetros: $z=\lambda$, $u=\mu$ Las infinitas soluciones se expresan:

$$S=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mu;\ \lambda,\ \mu\in\Re.$$

O también, $S=(-1,3,1,0)\lambda+(-3,2,0,1)\mu;\ \lambda,\mu\in\Re$

Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos

Consideremos el sistema no homogéneo AX = B, de m ecuaciones lineales con n incógnitas, donde $A=(a_{ij})\in M_{mn}(\Re)$ y

$$B=(b_1,\ b_2,\ldots\ldots,b_m)^t\in M_{mx1}(\Re)$$

Llamaremos **matriz ampliada** (o matriz aumentada) del sistema AX = B a:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Se tiene que:

El sistema AX = B es compatible si y sólo si r(A) = r(A; B)

O equivalente,

El sistema AX = B es incompatible si y sólo si $r(A) \neq r(A; B)$.

Supongamos que AX = B, sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es compatible.

1. Si r(A) = r(A; B) = n, entonces AX = B tiene solución única.
2. Si r(A) = r(A; B) < n, entonces AX = B tiene infinitas soluciones que se pueden expresar en términos de uno o más parámetros.

Si el sistema AX = B tiene n ecuaciones y n incógnitas, A es una matriz cuadrada de orden n. Y si el rango de A, r(A) = n, entonces r(A; B) también es n, A es invertible y la única solución del sistema la podemos encontrar a través de la inversa de A:

$$X = A^{-1}B$$

Ejercicio: Usando la inversa de la matriz del sistema, resuelva

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Resolución de sistemas no homogéneos

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} x + 4y - 3z &= -3 \\ 3x + 6y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$(A;B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & 8 & 10 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -5/3 \end{array}\right)$$

En este caso, r(A) = 2 = r(A; B) y el sistema es compatible. Como n = N° de incógnitas = 3, el sistema tiene infinitas soluciones; las buscamos en:

$$\begin{aligned} x + \tfrac{7}{3}z &= \tfrac{11}{3} \\ y - \tfrac{4}{3}z &= \tfrac{-5}{3} \end{aligned}$$

Soluciones:

$$(\tfrac{-7}{3}, \tfrac{4}{3}, 1)\lambda + (\tfrac{11}{3}, \tfrac{-5}{3}, 0); \quad \lambda \in \Re$$