INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE PLANIFICACION

UNIVERSIDAD DE CHILE

DIPLOMA PREPARACIÓN Y EVALUACIÓN SOCIAL DE PROYECTOS

NIVELACION
MATEMATICAS Y ESTADISTICA

PROFESORA: SARA ARANCIBIA C

2010

MATEMATICAS Y ESTADISTICA

I. FUNCIONES Y APLICACIONES

II. PROGRESIONES Y PROBLEMAS DE DECISIONES DE INVERSIÓN

III. ESTADISTICA DESCRIPTIVA

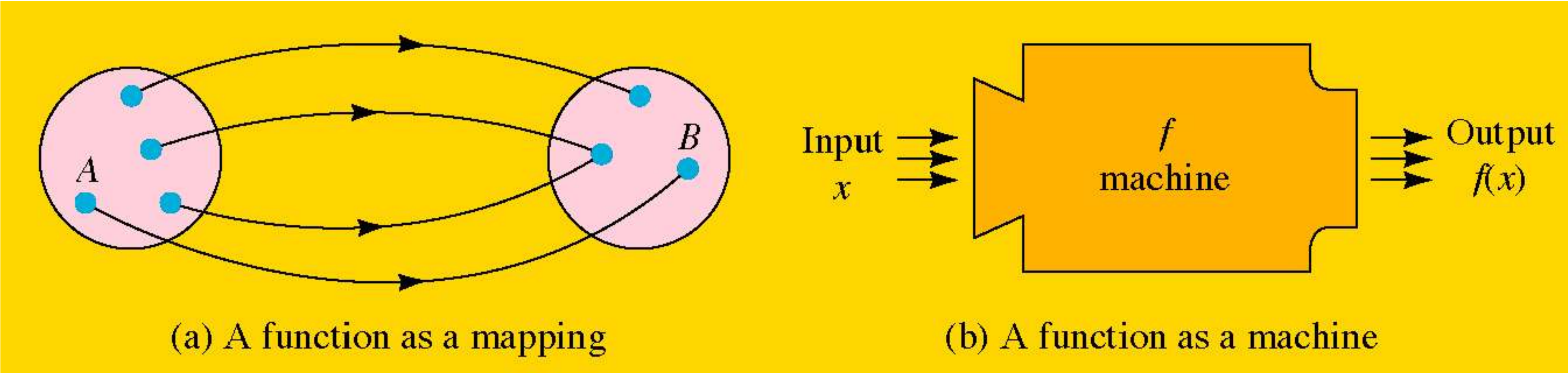
IV. ALGEBRA LINEAL

I. FUNCIONES Y APLICACIONES

Contenidos:

- Funciones Básicas y Aplicaciones
- La derivada
- Análisis marginal

Visualización de una función



Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A uno y sólo un elemento de un conjunto B.

Las funciones preprogramadas de una calculadora son ejemplos de la función concebida como una máquina

Otra forma de visualizar es mediante un diagrama de flechas. Cada flecha va de un elemento de A y termina en un elemento de B.

Concepto de función

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra.

1.- El área de un círculo depende de la longitud de su radio

2.- El costo de producir cualquier artículo depende del número de artículos producidos.

3.- La cantidad en la que crecerán sus ahorros en un año dependen de la tasa de interés ofrecida por el banco

Problema
Seleccione una noticia del diario e identifique variables (dependiente e independiente) con las cuales se podría obtener una función.

Ejemplo:
Título de la noticia: "Aumento de usuarios de Ferrocarril"

Variable dependiente: Cantidad de pasajeros que usan el ferrocarril en el periodo t
Variables independientes:
Precio del pasaje en ferrocarril (en el periodo
Precio del pasaje en bus (en el periodo t)
Tiempo de viaje en ferrocarril (en el periodo t)
Calidad del servicio (en el periodo t)

Funciones por partes

Algunas veces sucede que debemos usar funciones que están definidas por más de una expresión.

Ejercicio:

Un vendedor tiene un salario base de \$1000 al mes más una comisión del 8% de las ventas totales que realiza por arriba de \$6000. Exprese sus ingresos mensuales (I) como una función de x, donde x son las ventas mensuales totales en dólares.

¿Cuál es el dominio de esta función?

¿Cuál será su salario total cuando realiza ventas por \$ 5000 y \$8000?

Funciones básicas:

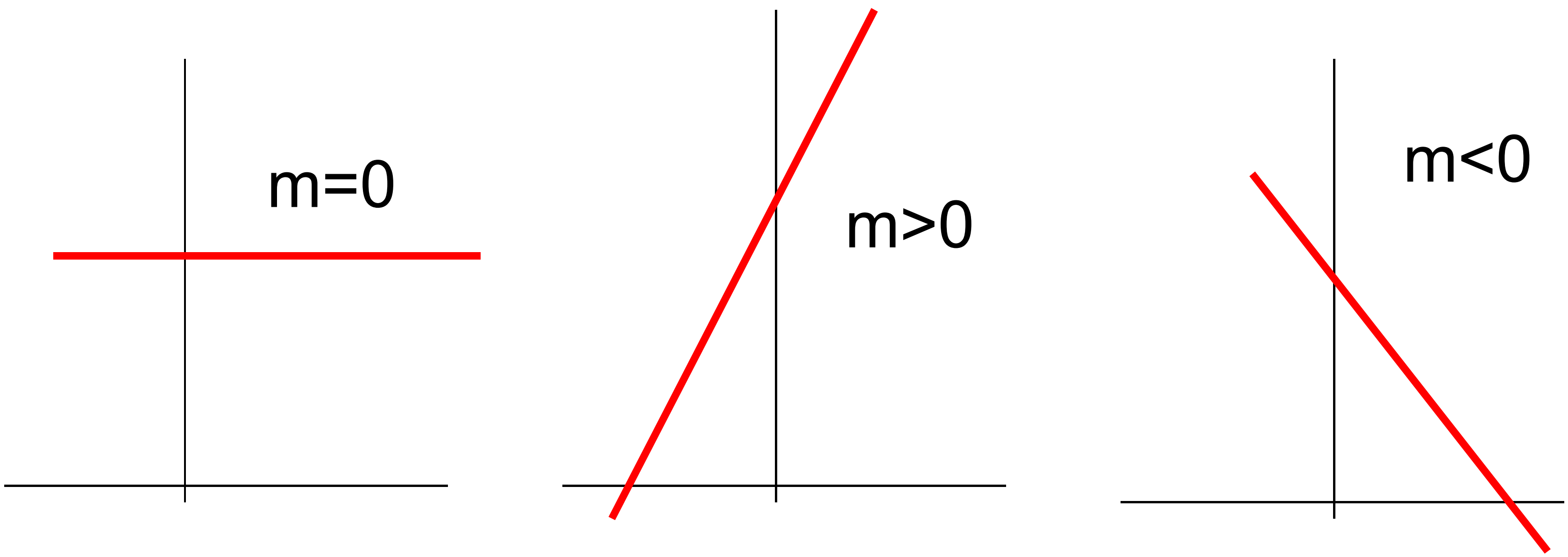
- **Función Lineal**
- **Función Valor absoluto**
- **Función Raíz cuadrada**
- **Función Cuadrática**
- **Función Exponencial**
- **Función Logaritmo**

Función lineal:

Una función lineal es una función de la forma

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \dashrightarrow mx+b$$

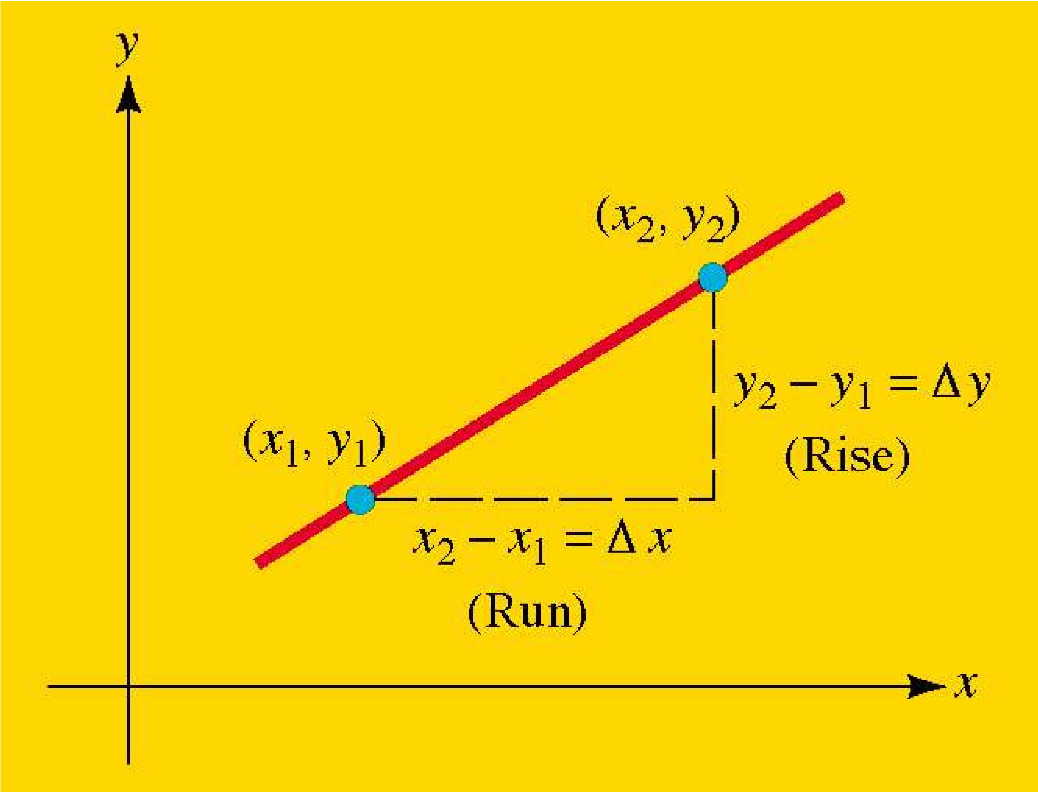
con m, b $\in$IR, que tiene como representación gráfica una recta

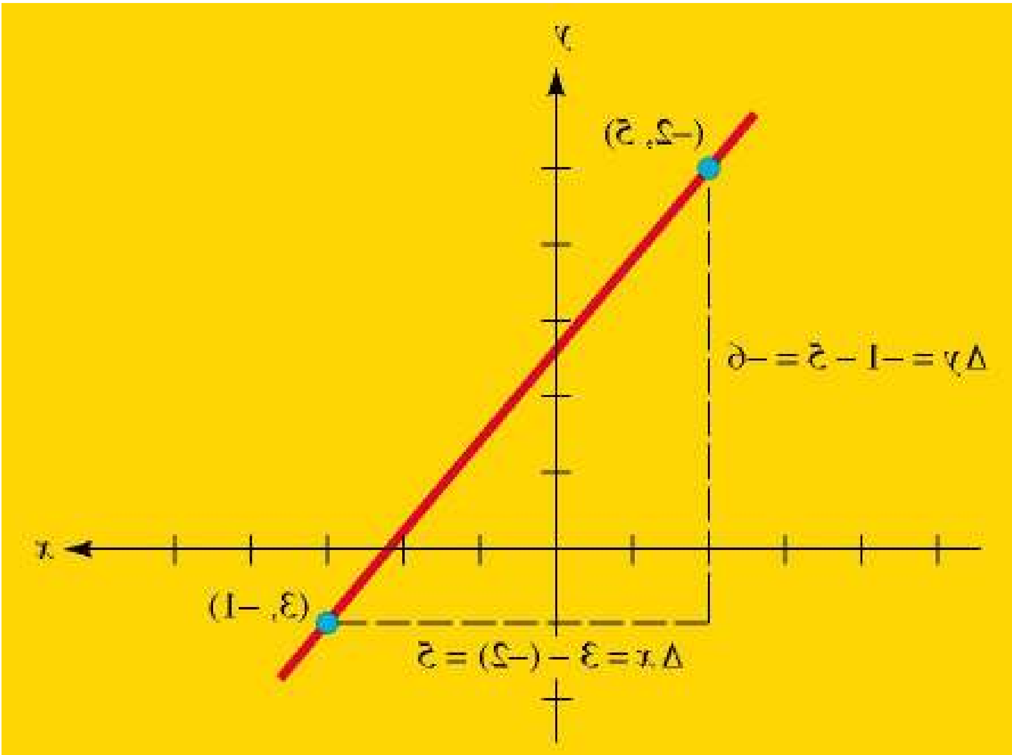


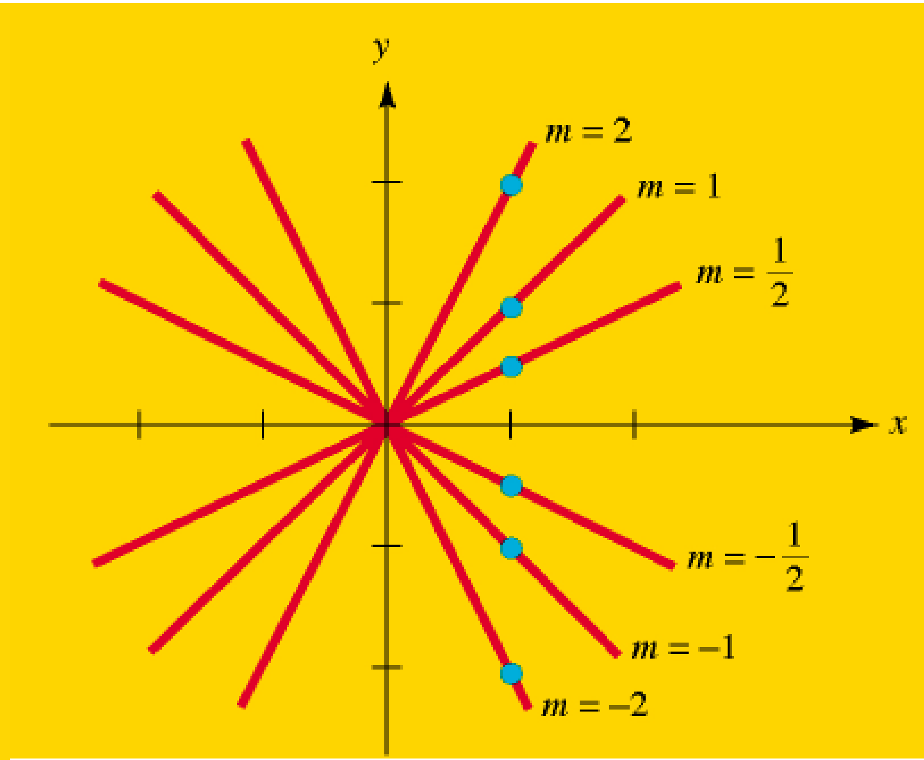
La pendiente m de una línea recta se define como la razón de la elevación al recorrido.

$$m = \frac{elevación}{recorrido} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$donde\ \mathrm{P} = (\mathrm{x}_1, y_1)\ \mathrm{y}\ \mathrm{Q} = (x_2, y_2)\ \mathrm{son\ puntos\ de\ la\ recta}$





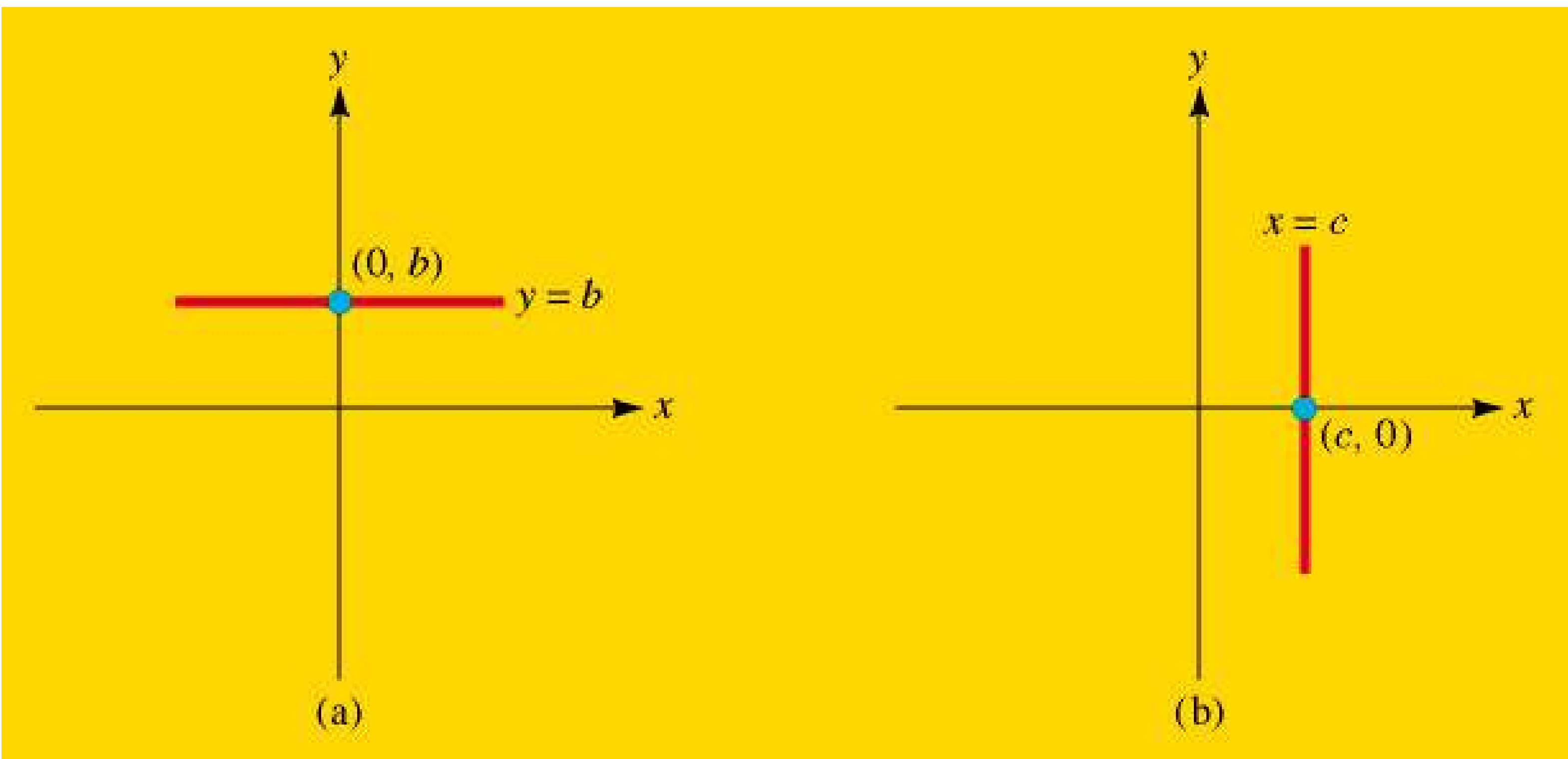


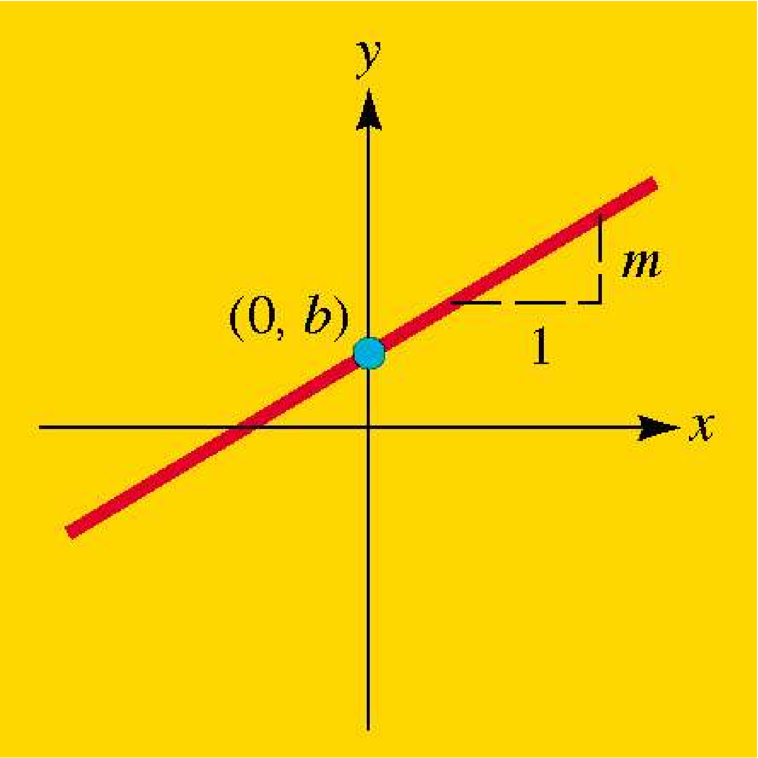
La pendiente no está definida para líneas verticales.
Debe observarse que la pendiente de una línea es la misma, no importando las posiciones de los puntos P y Q sobre la línea.

Si m=1 y b=0, se tiene la función identidad tal que Id(x)=x

La tabla resume las diversas formas asumidas por la ecuación de una línea recta

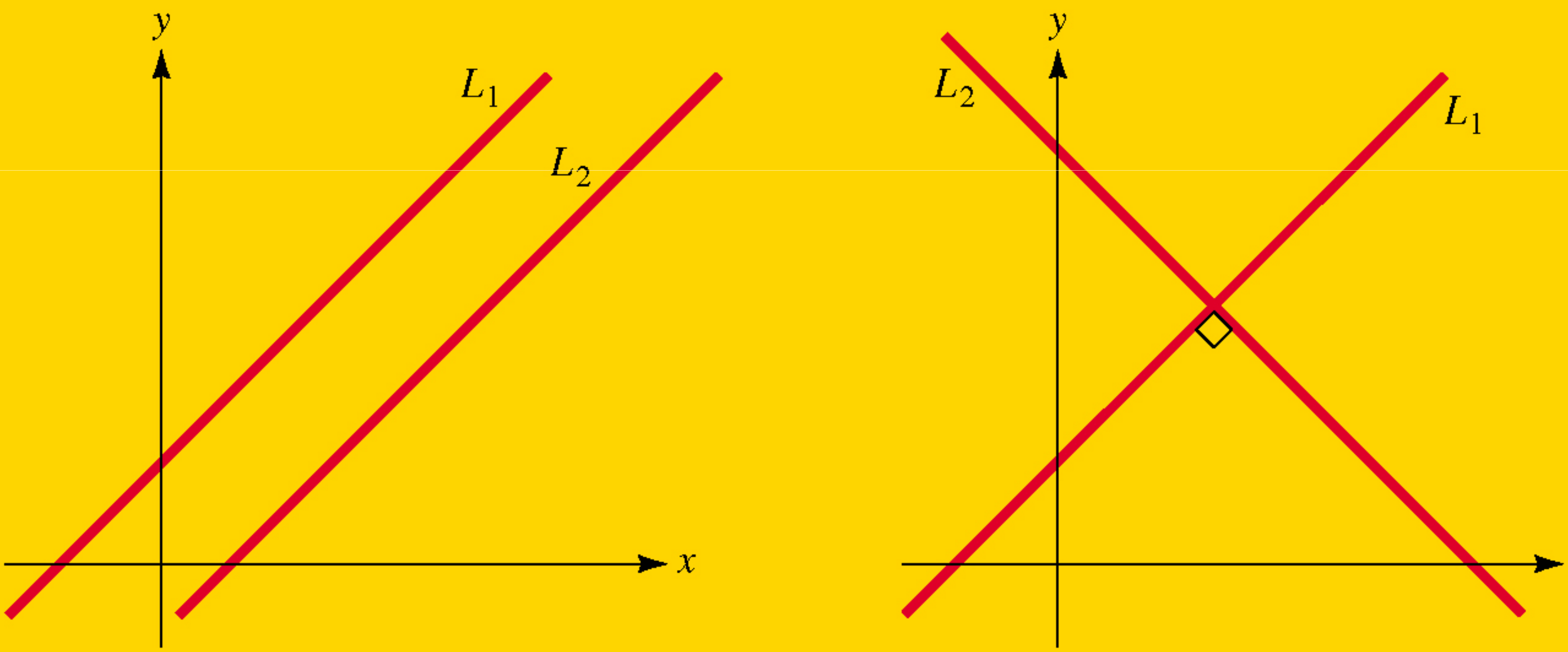
1.–	Fórmula general	$Ax + By + C = 0$, A y B no son cero a la vez
2.-	Fórmula punto - pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
3.–	Fórmula pendiente ordenada al origen	$y = mx + b$
4.-	Línea horizontal	$y = b$
5.-	Línea vertical	$x = a$





Ejercicio: (modelo de costos)
El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de $350, mientras que cuesta $600 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determine la relación entre el costo total de producir x máquinas de escribir al día y dibuje su gráfica.

Nota:
Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales
Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1



(a) Parallel lines have $m_1 = m_2$

(b) Perpendicular lines have $m_2 = -1/m_1$

Problema:
El administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a $1,10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generales de la empresa en $800 al mes y el costo de material y de mano de obra será de $0,6 por cada empaque.¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Aplicación : Problema de asignación de presupuesto

El alcalde de una comuna tiene un presupuesto de $200 millones para gastos de transporte, e intenta utilizarlos para construir otras líneas de tren subterráneo o carreteras. Si cuesta $2,5 millones construir 1 km de carretera y $4 millones construir 1 km de línea de tren subterráneo. Encuentre la relación entre el número de kilómetros de autopistas y de líneas de tren subterráneo que pueden construirse usando la totalidad de presupuesto.

a) Grafique e interprete la pendiente de la relación lineal que se obtiene.

b) ¿Cómo cambia el problema si se mantienen los costos y el presupuesto aumenta en $300 ?.

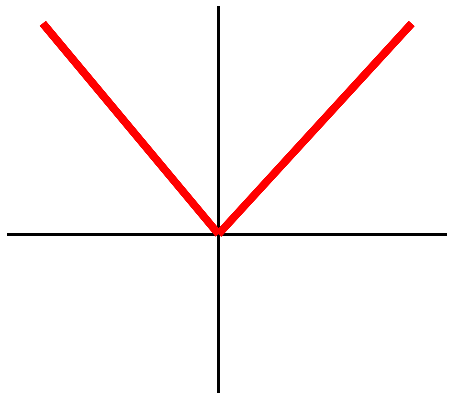
c) ¿Qué ocurre con el problema original si sólo cambia el costo de construir un Km de carretera a $4 millones?

Grafique las situaciones anteriores

Función valor absoluto

$$f : IR \longrightarrow IR$$

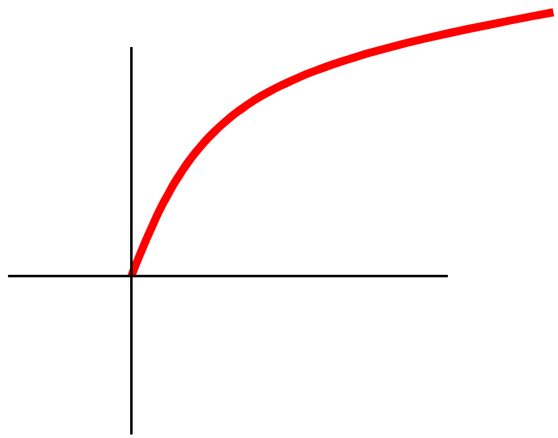
$$\mathrm{x} \longrightarrow |x| = \begin{cases} x & \mathrm{x} \geq 0 \\ -x & \mathrm{x} < 0 \end{cases}$$



Función raíz cuadrada

$$f : IR_0^+ \longrightarrow IR$$

$$\mathrm{x} \longrightarrow \sqrt{x}$$



OBS: $\sqrt{\mathrm{x}^2} = |x|$

Función cuadrática

Es una función de la forma

$$f : IR \longrightarrow IR$$

$$\mathrm{x} \longrightarrow ax^2 + bx + c$$

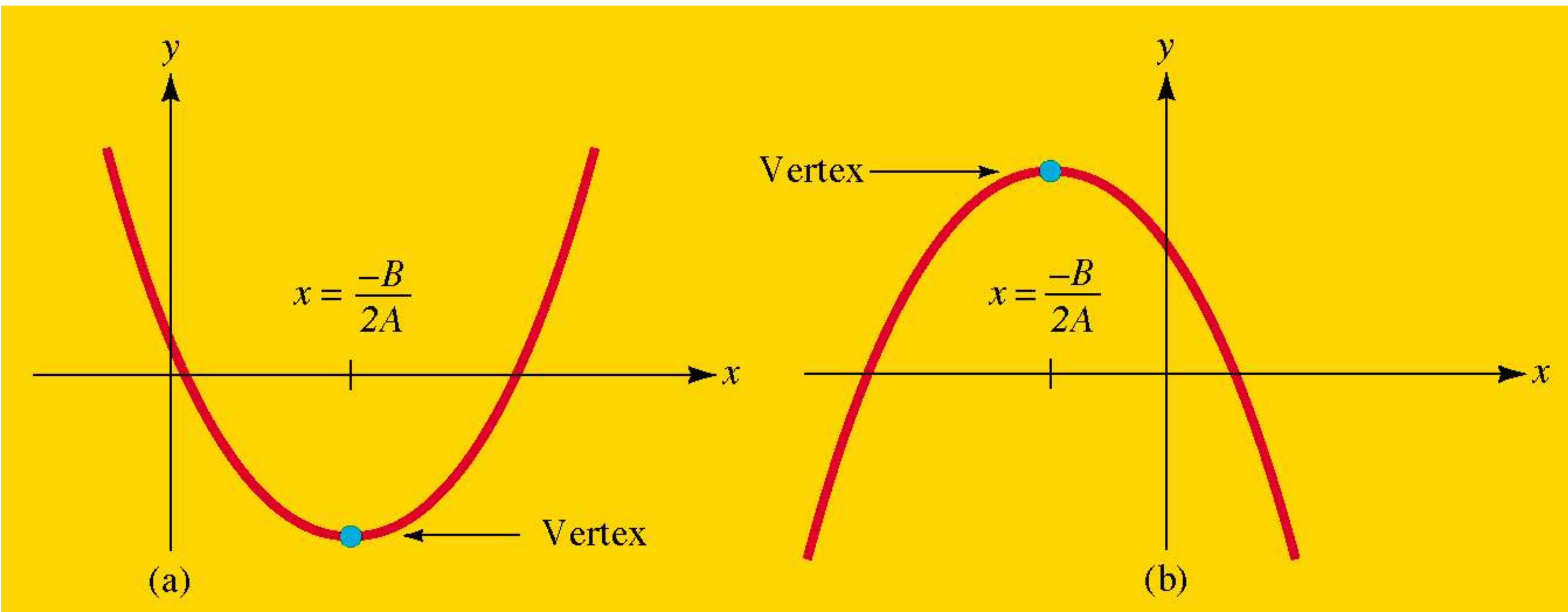
con a, b, c $\in$IR, a$\neq$0 que tiene como representación gráfica una parábola.

Para graficar una parábola es conveniente conocer (si existen) las intersecciones con los ejes de coordenadas, y el vértice V de la parábola cuyas coordenadas son

$$\mathrm{x} = \frac{-b}{2a}, \quad y = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

Si a>0 se abre hacia arriba . Si a<0 se abre hacia abajo

Gráfica de la función cuadrática



Ecuación cuadrática

Sea a, b,c en IR con a distinto de cero.
Una ecuación cuadrática es de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sea $\Delta = b^2 - 4ac$

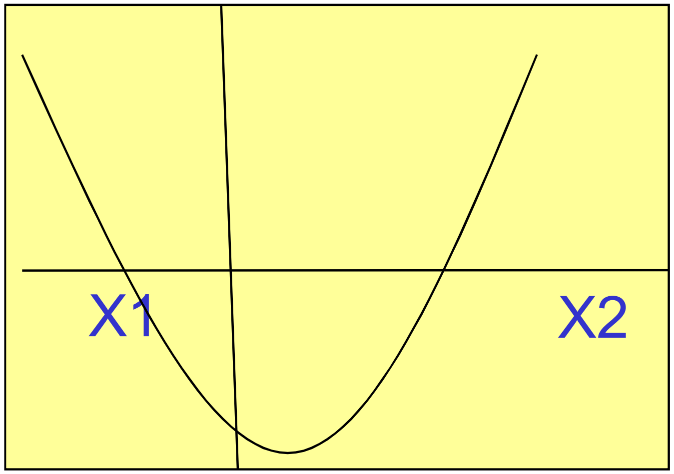
el discriminante de la ecuación de segundo grado

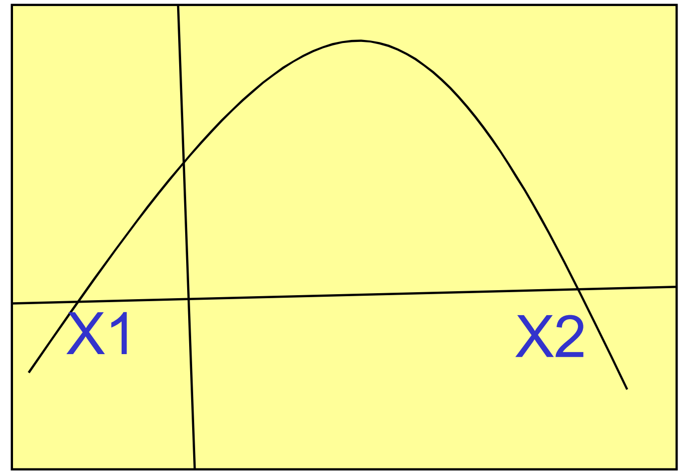
Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos raíces reales distintas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Su representación gráfica corresponde a los dos interceptos con el eje x.

Raíces de una ecuación cuadrática





Raíces o soluciones de la ecuación cuadrática

Ejemplo: $2x^2 + 2x - 12 = 0$

Tiene dos raíces reales distintas pues su discriminante es mayor a cero

$$\Delta = 2^2 - 4 * 2 * (-12) = 100 > 0$$

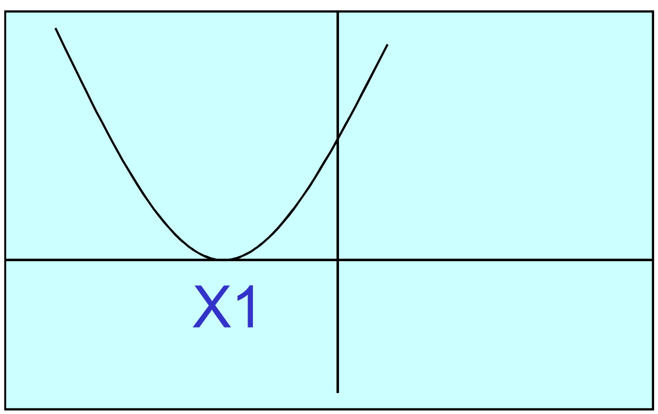
Sus raíces son X_1=2, x_2= -3

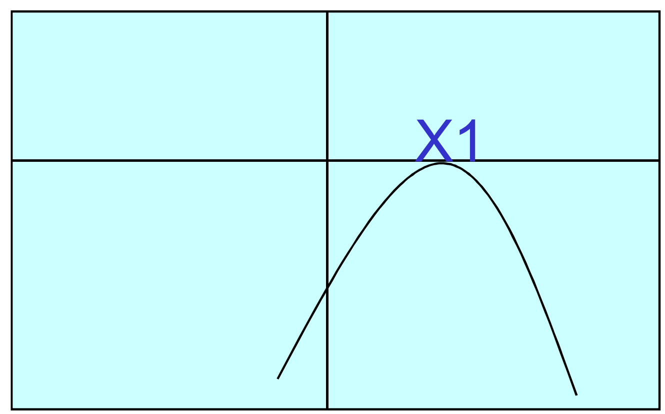
Raíces de una ecuación cuadrática

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene dos raíces reales iguales

$$x_1 = \frac{-b}{2a} \quad , \; x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Su representación gráfica es el vértice de la parábola que corta al eje x





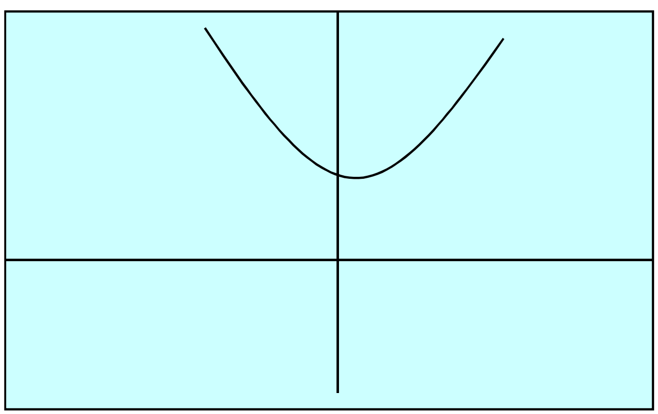
Raíces de una ecuación cuadrática

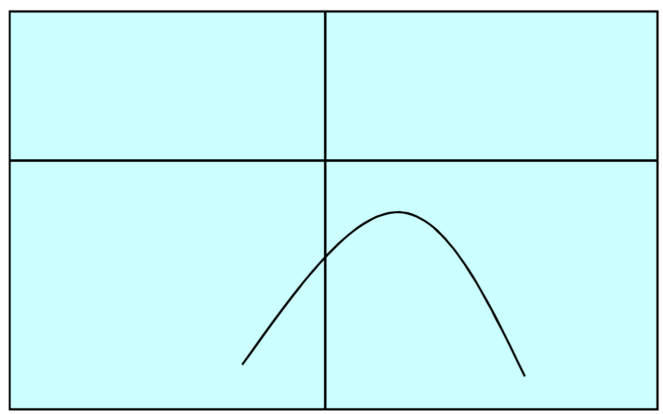
Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene solución

En la representación gráfica se observa que no hay interceptos con el eje x.

En ese caso

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \vee \quad ax^2 + bx + c < 0 \qquad \forall \mathrm{x} \in \mathrm{IR}$$





Raíces de una ecuación cuadrática

Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

entonces $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Propiedad: Sean a, b en IR

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \vee b = 0$$

Ejercicio:
Resuelva de tres maneras distintas la ecuación $x^2 = 4$

Ejercicio:
La ganancia mensual estimada obtenida por la empresa Cannon al producir y vender x unidades de cámaras modelo M1 es en dólares

$$P(x) = -0{,}04x^2 + 240x - 10000$$

Encuentre cuántas cámaras debe producir cada mes para maximizar sus ganancias.

Ejercicio:
El costo de producir x unidades de un artículo está dado por $C=(650+5x)$. El precio unitario del artículo en dólares está dado por $p=200-3x$.

a)Determine la función de utilidad

b)Cuántas unidades de este artículo deberán producirse y venderse de modo que la utilidad mensual sea por lo menos $2500 al mes.

c)Cuántas unidades de este artículo deberán producirse y venderse para obtener la utilidad máxima. Grafique la función

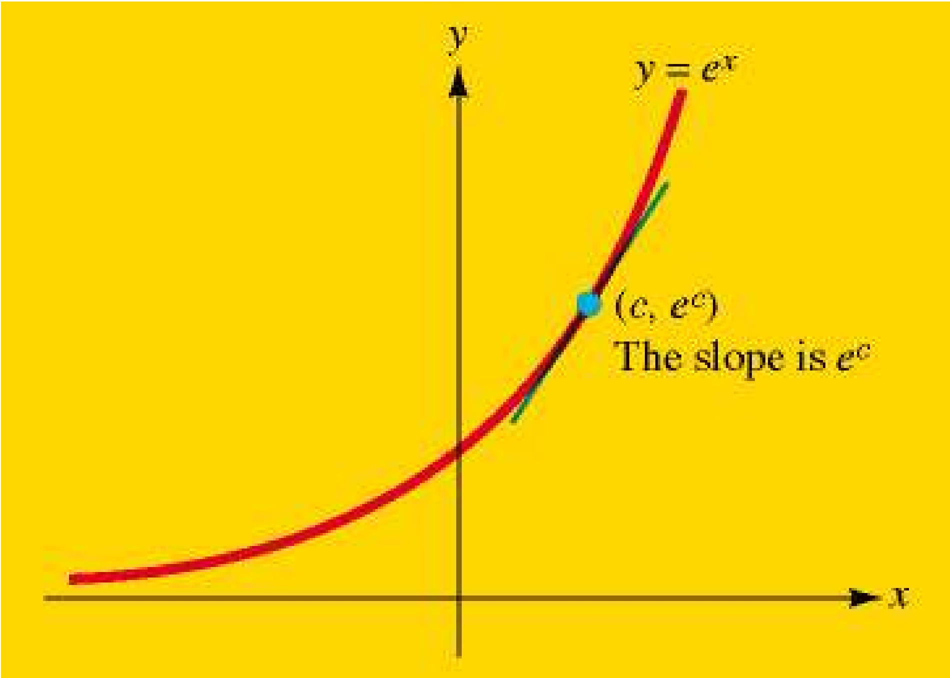
Función exponencial

La función exponencial con base e es una función de la forma

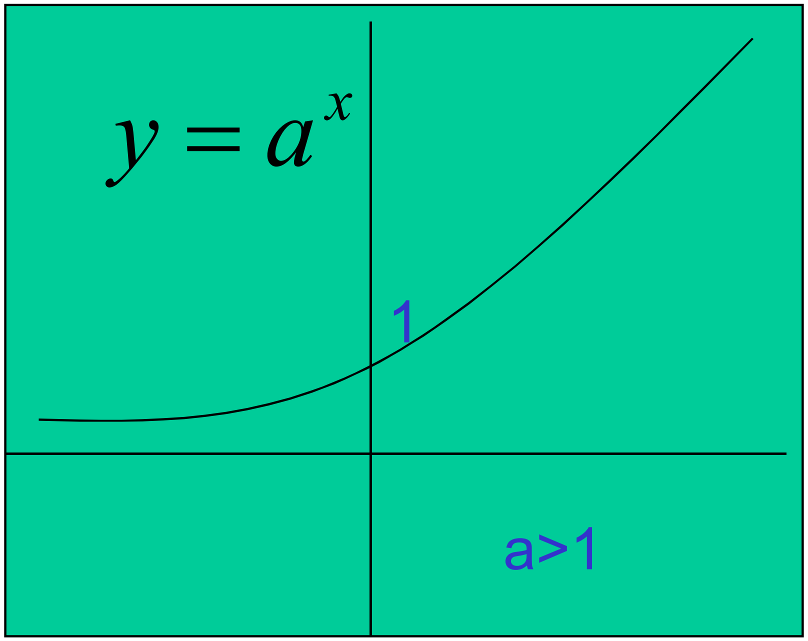
$$\exp : IR \longrightarrow IR$$

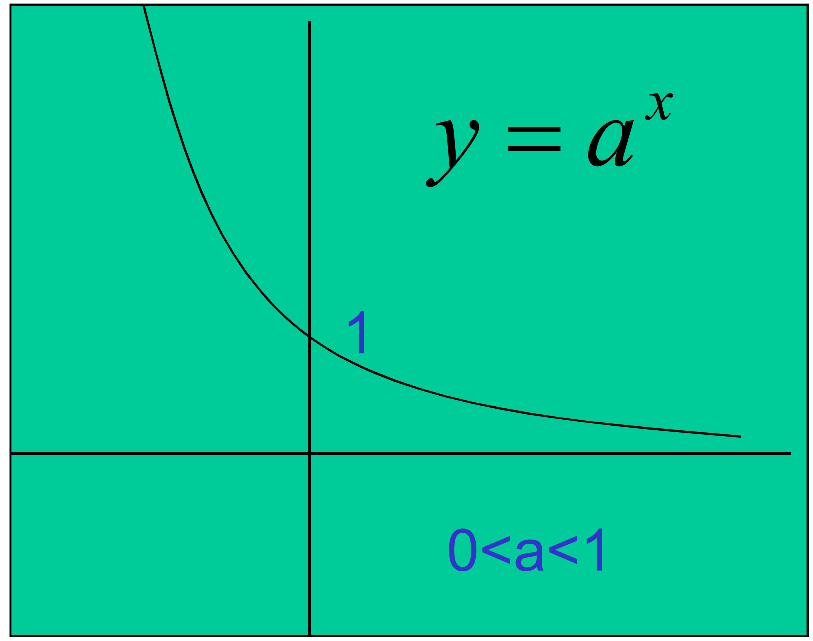
$$x \longrightarrow e^{x}$$

Donde e≅2,71. El recorrido de esta función es IR^{+}



Función exponencial

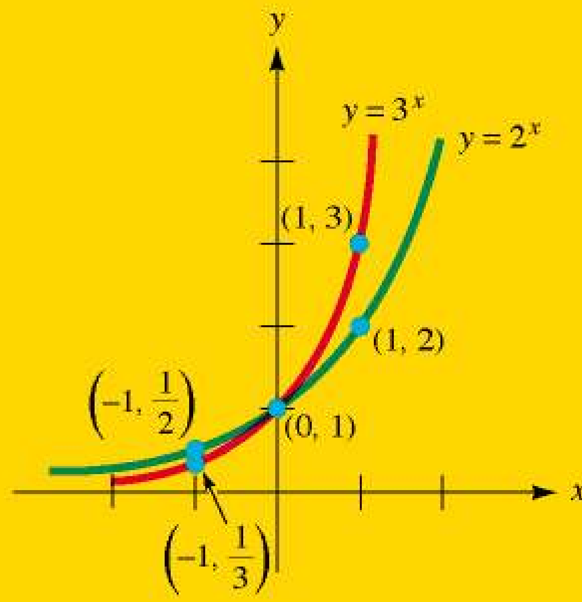




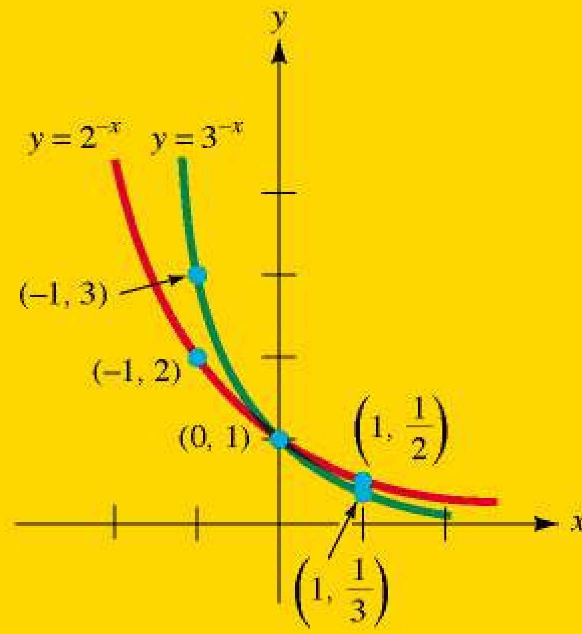
Función creciente

Función decreciente

x	2^x	3^x
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
0	1	1
1	2	3
2	4	9

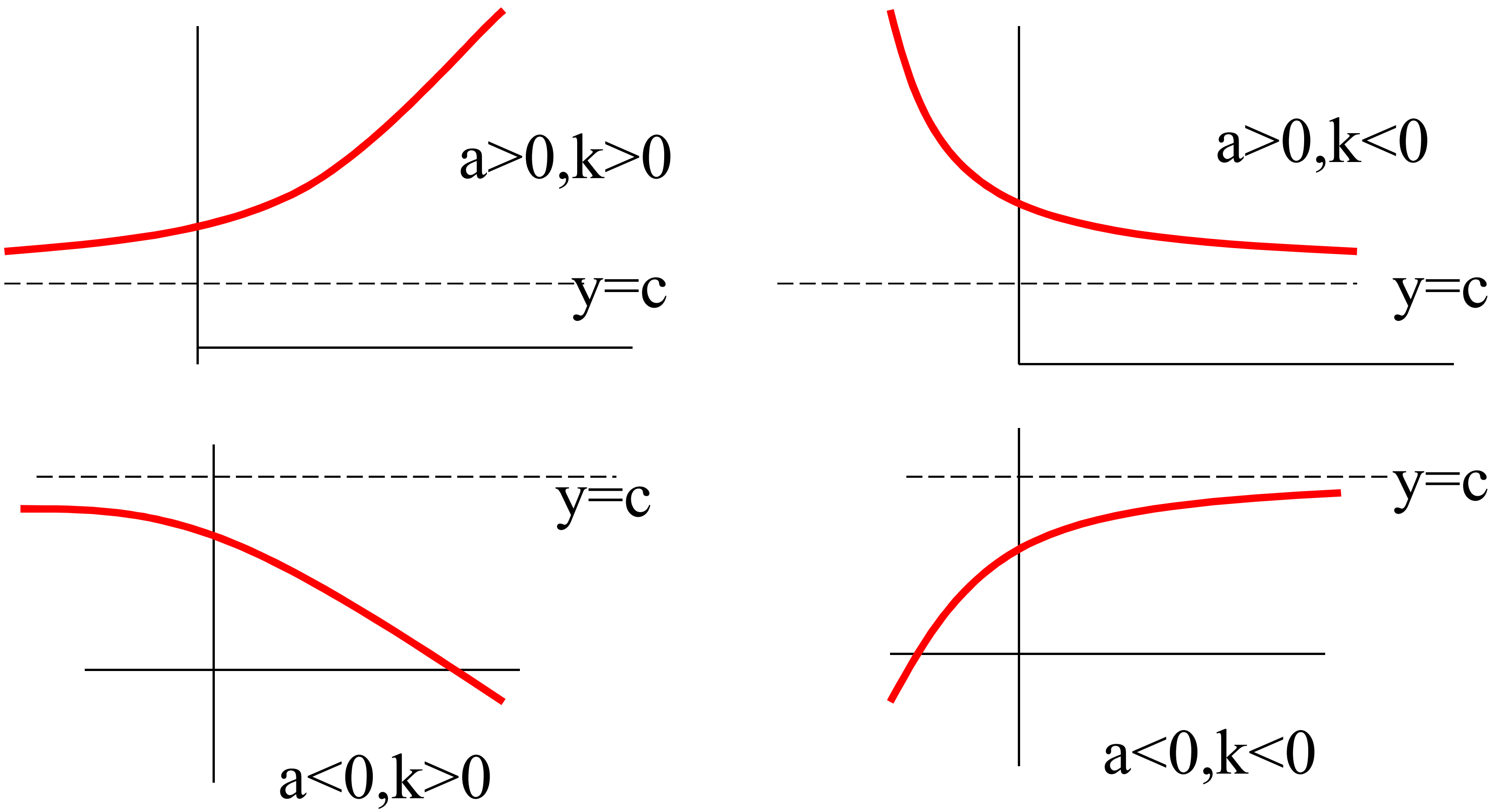


x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$
-2	4	9
-1	2	3
0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$



Una forma más general de la función exponencial es

$$y = ae^{kx} + c$$



Propiedades

Si a > 0, b > 0, $x \in IR$, $y \in IR$

$$i) \quad a^x a^y = a^{x+y}$$

$$ii) \quad a^x b^x = (ab)^x$$

$$iii) \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

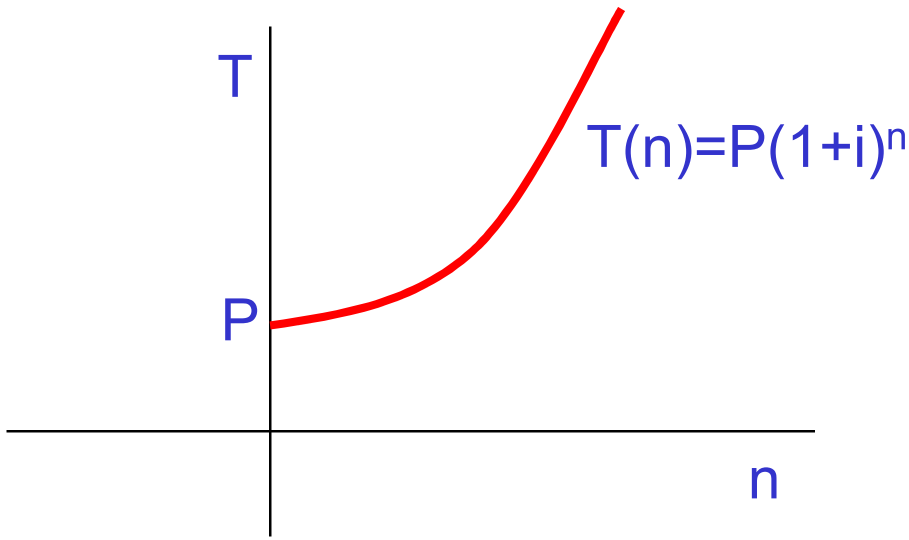
$$iv) \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$v) \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Aplicación

Si una suma P se invierte a una tasa de interés del R por ciento anual compuesto, el valor de la inversión al término del n-ésimo año está dada por la fórmula

$$T_n = P(1+i)^n, \qquad i = \frac{R}{100}$$



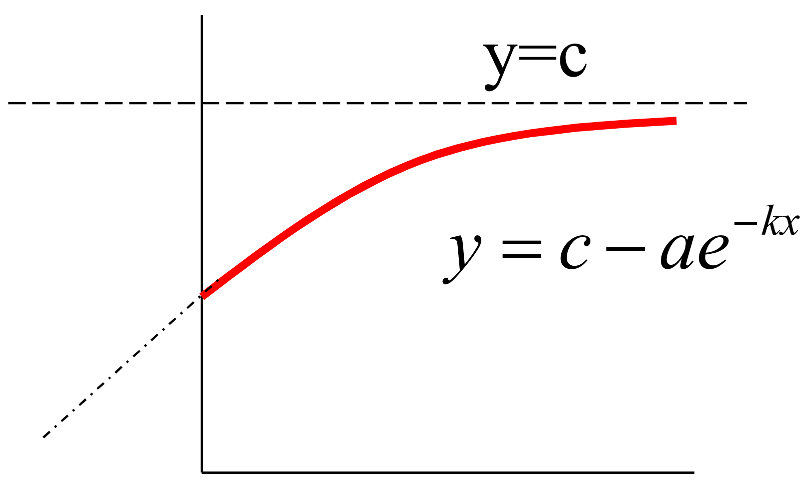
Ejercicio: Si \$2000 se invierten a un interés compuesto anual del 6%, encuentre el valor de la inversión después de 4 años.

Curvas de Aprendizaje

A causa del empleo extenso que los sicólogos utilizan para describir el aprendizaje, las curvas exponenciales de la forma

$$y = c - ae^{-kx}$$

donde c,a,y k son positivos, se citan con frecuencia como curvas de aprendizaje



Obsérvese que la curva crece un poco rápido al principio, pero su razón de crecimiento comienza a disminuir de manera considerable después de cierto tiempo.
Este comportamiento de la gráfica de la función recuerda el patrón de aprendizaje experimentado por los obreros involucrados en un trabajo altamente repetitivo, por ejemplo, la productividad de un trabajador en una línea de ensamblaje aumenta con rapidez en las primeras etapas del periodo de capacitación. Este incremento de la productividad es resultado directo de la capacitación y la experiencia acumulada del sujeto.
Pero la razón de incremento de productividad comienza a reducirse conforme pasa el tiempo, y el nivel de productividad tiende a cierto nivel fijo por las limitaciones del trabajador o de la máquina

Ejercicio:

La división de cámaras fotográficas de la compañía FOTOS produce una cámara reflex con un lente de 35 mm, modelo F. El departamento de capacitación determina que, después de concluir el programa de capacitación básico, un trabajador nuevo, sin experiencia previa, podrá ensamblar

$$Q(t) = 50 - 30e^{-0,5t}$$

cámaras modelo F cada día, t meses después de iniciar su trabajo en la línea de ensamblaje.

A)¿Cuántas cámaras modelo F puede ensamblar al día un trabajador nuevo, después de la capacitación básica?

B) ¿Cuántas cámaras modelo F puede ensamblar al día un trabajador con uno, dos, y seis meses de experiencia?

C) ¿Cuántas cámaras modelo F puede ensamblar diariamente un trabajador experimentado ?

Función logaritmo

Dado que la función exponencial

$$\exp_a : IR \longrightarrow IR^+ \qquad\qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\text{x} \longrightarrow a^x$$

es biyectiva entonces existe su inversa, la que se denomina función logaritmo

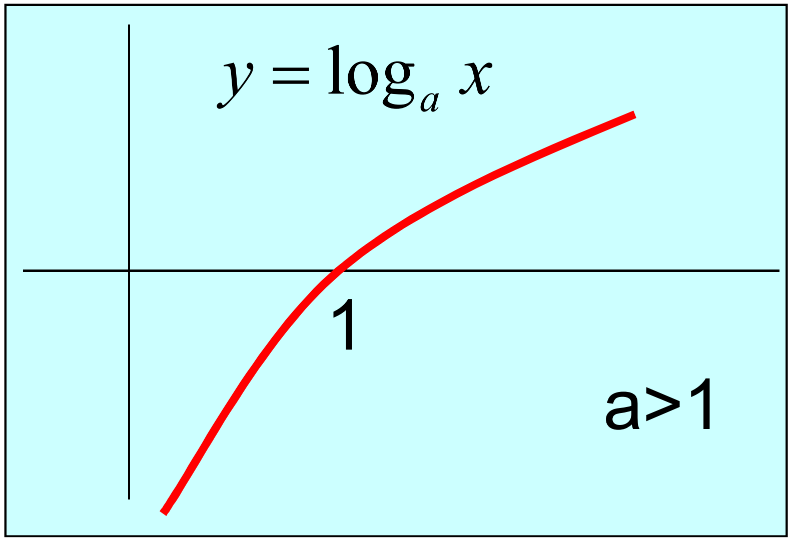
La función logaritmo en base a se define como

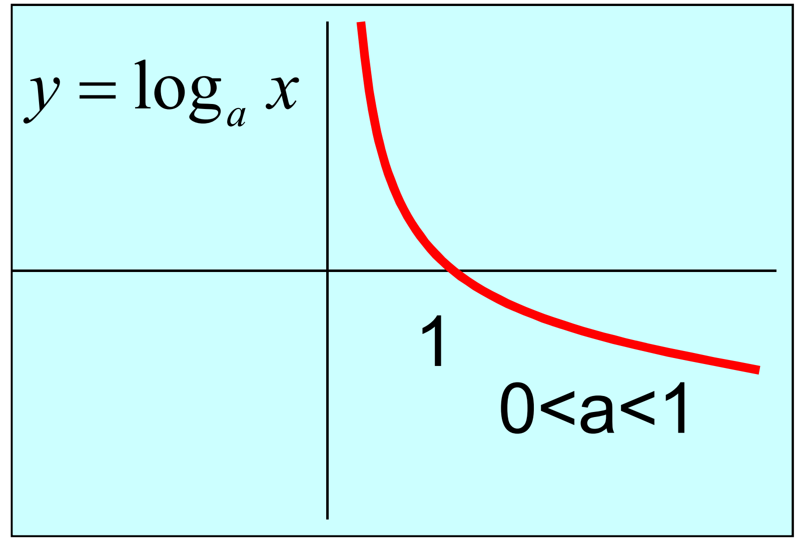
$$\log_a : IR^+ \longrightarrow IR$$

$$\text{x} \longrightarrow \log_a(x)$$

$$\textit{donde} \qquad \text{y} = \log_{\text{a}}(x) \iff x = a^y$$

Función logaritmo





Función creciente

Función decreciente

Propiedades:

Sea a un número real positivo distinto de 1 entonces

$$\log_a a^x = x \qquad \mathrm{x} \in \mathrm{IR}$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad \mathrm{x} \in \mathrm{IR}^+$$

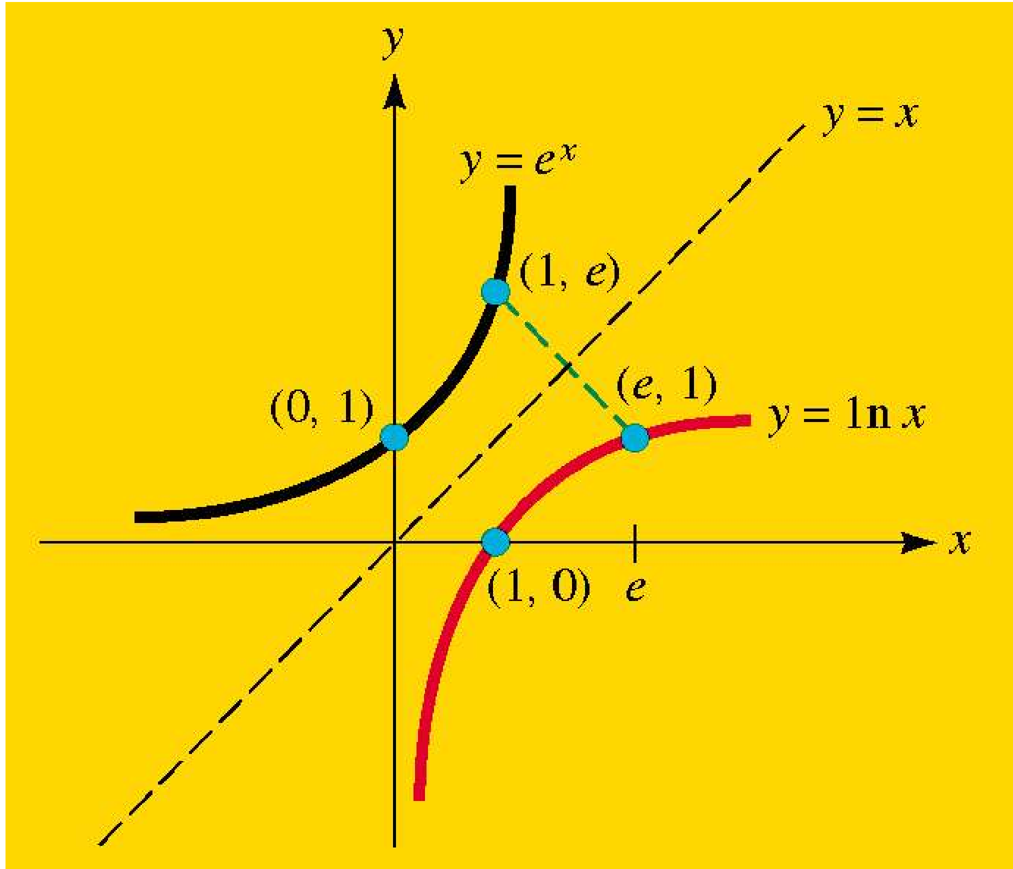
$$Para \quad \mathrm{x} \in \mathrm{IR}^+, y \in \mathrm{IR}^+$$

$$\log_{\mathrm{a}}(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_4 10 = \log_4 5 + \log_4 2$$

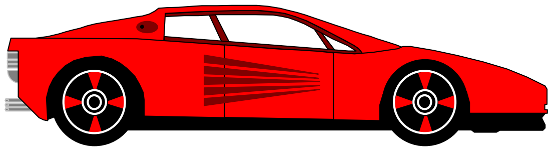
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \log_8\left(\frac{5}{6}\right) = \log_8 5 - \log_8 6$$

$$\log_a x^r = r\log_a x \qquad \log_5 3^2 = 2\log_5 3$$

OBS. Si la base es e entonces la función logaritmo se denomina logaritmo natural y se escribe ln



Una de las aplicaciones más importantes de los logaritmos es en la resolución de ciertos tipos de ecuaciones en que la incógnita aparece como un exponente.



Ejercicio: Poco después de consumir una dosis sustancial de whisky, el nivel de alcohol en la sangre de una persona sube a un nivel de 0,3 miligramos por mililitro (mg/ml). De ahí en adelante, este nivel decrece de acuerdo con la fórmula $(0,3)(0,5)^t$, en donde t es el tiempo medido en horas a partir del instante en que se alcanza el nivel más alto. ¿Cuánto tendrá que esperar esa persona para que pueda conducir legalmente su automóvil?. En su localidad, el límite legal es de 0,08 mg/ ml de alcohol en la sangre.)

Ejemplos de funciones en varias variables

Función de demanda:
La cantidad de un bien que adquirirá un consumidor dependerá de su precio, los ingresos del consumidor, el precio de los bienes sustitutos y los gustos. Esta relación se puede expresar mediante la función general;

$$Q_d = f(P, Y, Ps, G)$$

donde

$$Q_d = Cantidad \ \textbf{demandada}$$

$$\textbf{P} = \textbf{Precio}$$

$$\textbf{Y} = \textbf{Ingreso}$$

$$\textbf{Ps} = \textbf{Precio de bienes sustitutos}$$

$$\textbf{G} = G\textbf{usto}$$

Funciones de producción

La producción de la mayoría de artículos requiere el uso de por lo menos dos factores de producción por ejemplo; trabajo, tierra, capital, materia les o máquinas. Si la cantidad z de un artículo se produce utilizando las cantidades x e y respectivamente, de dos factores de producción entonces la función de producción z= f(x,y) entrega el producto final cuando se usa las cantidades x e y de los insumos respectivamente. Por ejemplo, una función de producción Cobb-Douglas toma la forma

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

En donde A es una constante positiva, K y L son insumos de capital y mano de obra respectivamente y α y β son fracciones positivas menores que uno.

Relación de Fischer

Una relación de gran utilidad en decisiones de inversión es la relación de Fisher que relaciona las tasas nominales y reales. Esta relación está dada por

$$(1+i_n) = (1+i_r)(1+\pi)$$

$$donde$$

$$i_n = tasa \quad nominal$$

$$i_r = tasa \quad real$$

$$\pi = \inf lación$$

Despejando la tasa nominal o la tasa real se tiene las siguientes funciones de dos variables

$$i_n = f(i_r, \pi)$$

$$i_n = (1+i_r)(1+\pi) - 1$$

$$i_r = f(i_n, \pi)$$

$$i_r = \frac{(1+i_n)}{(1+\pi)} - 1$$

Aplicaciones: Modelación

Función de costo:
El costo de producir un producto está en función del volumen producido. Este costo puede definirse de manera general como una suma de dos costos: Costo fijo y costo variable.

El costo fijo (CF) es la porción del costo total que no depende del volumen de producción.

El costo variable (CV) es la porción del costo total que depende y varía con el volumen de producción.

El modelo costo volumen para producir x unidades se podría escribir mediante la función.
$C(x)= CF+CV(x)$

Ejemplo:
Suponga que el costo de preparación de una línea de producción es de 3000 dólares. Se trata de un costo fijo en el que se incurre independientemente del número de unidades que finalmente se produzcan. Además suponga que los costos de mano de obra y de material variables son de 2 dólares por cada unidad producida. El modelo costo-volumen para producir x unidades se podría escribir de la forma.

$C(x)=3000+2x$

donde

x= volumen de producción en unidades

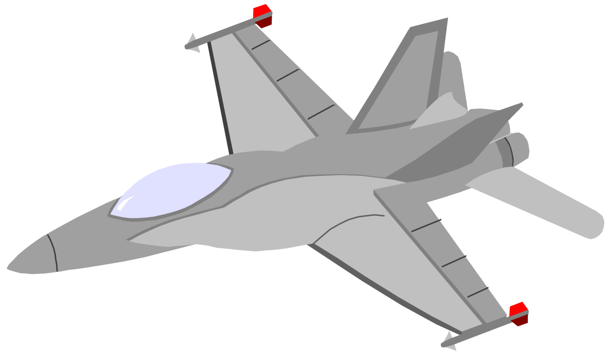
$C(x)$= Costo total de producir x unidades

Función de ingresos

Si $P(x)$ es el precio del producto o servicio y x es el volumen de ventas en unidades, entonces el ingreso total asociado a la venta de x unidades se puede escribir mediante la función
$R(x)=xP(x)$

OBS: Función Ingreso marginal:
Se define como la tasa de cambio del ingreso total respecto al volumen de ventas. Se trata del incremento en el ingreso total resultado de un incremento de una unidad en el volumen de ventas.

Ejercicio:



Considere el Aeropuerto “Aeroalas”, que recibe ingresos por pasajeros embarcados y por servicios comerciales como Renta Car, Restaurant, Estacionamientos, etc . Además recibe un subsidio anual de parte de la DGAC.

Con el fin de realizar una valoración económica del aeropuerto, la administración desea saber los ingresos futuros proyectados para los años 2000 a 2007 (fin del periodo de concesión). Para esto se ha considerado la proyección de pasajeros embarcados que aparece en la tabla 1. La tarifa por pasajero embarcado es 0,2115 UF. El ingreso por servicios comerciales se ha estimado que crecerá anualmente de acuerdo a las tasas indicadas en la tabla 3 .

Determine la función de ingresos totales para cada año del aeropuerto entregando el flujo de ingresos futuros.

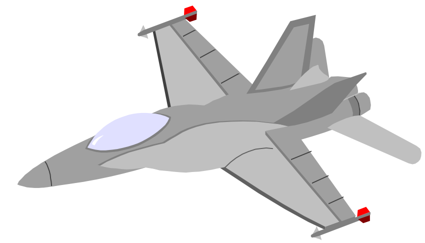
Datos del problema

Tabla 1

Año	**Pasajeros embarcados**
2000	270081
2001	299790
2002	323773
2003	349675
2004	374152
2005	400434
2006	428367
2007	458353

Tabla 2

Año	Subsidio (DGAC)
2000	5405
2001	5783
2002	6188
2003	6621
2004	7084
2005	7580
2006	8111
2007	8678



Ingresos subconcesiones y servicios comerciales

	Crecimiento	2000
Renta Car	0	4545
Taxis	0,01	677
Bus	0,01	390
Transfer	0,01	616
Cajero autom	0	132
Restaurante	0,1	1233
Estacioamiento	0,01	3151
Líneas Aéreas	0,01	2336
Comunicaciones	0,01	574
Publicidad	0,01	2525
Salón VIP	0,01	448
Locales comerciales	0,01	1483
Total		18110

Sean

PE_t: Pasajeros embarcados año t

S_t: Subsidio (en UF) del año t

SC_t: Total ingresos serv comerciales año t

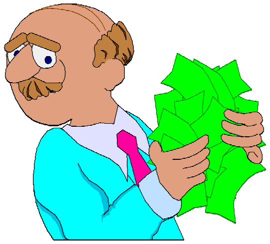
I_t: Ingresos totales

$$I_t = 0{,}2115 * PE_t + S_t + SC_t$$

Función de utilidad

Uno de los criterios más importantes para la toma de decisiones administrativas es la utilidad.

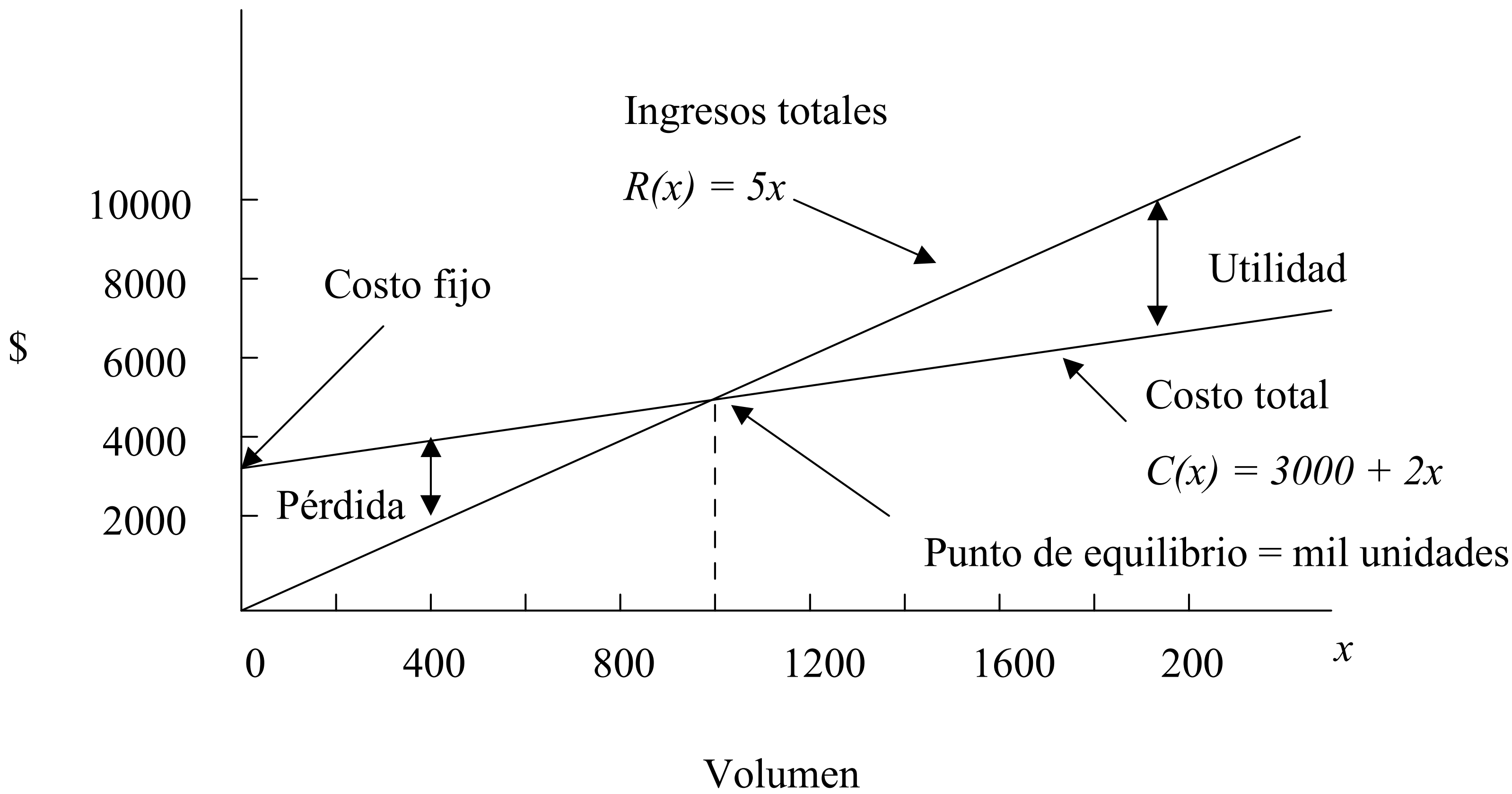
Si suponemos que sólo producimos lo que vendemos, el volumen de producción y el volumen de ventas serán iguales. Podemos combinar las funciones de costo e ingreso vistas anteriormente para desarrollar un modelo utilidad-volumen que determinará la utilidad asociada con un volumen especificado de producción y ventas.



$U(x)= R(x)-C(x)$

Si se conoce el punto de equilibrio, el administrador rápidamente puede inferir qué volúmenes por encima del punto de equilibrio darán como resultado una utilidad, en tanto qué volúmenes por debajo del punto de equilibrio resultarán en pérdida

Gráfica del Análisis de Punto de Equilibrio
para el ejemplo de Producción.



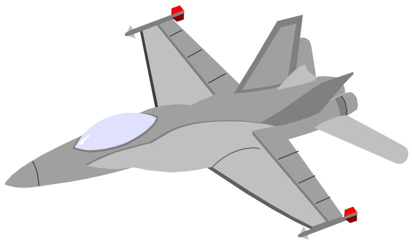
Ejercicio:

Un fabricante puede vender cierto producto a $110 la unidad. El costo total equivale a costos indirectos fijos de $7500 más costos de producción de $60 por unidad.

a) ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para alcanzar el punto de equilibrio?

b) ¿Cuál es la utilidad o la pérdida del fabricante si se venden 100 unidades?

c) ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para obtener una utilidad de $1250?



Ejercicio:

La administración del Aeropuerto “Aeroalas”, además de conocer los ingresos futuros, desea saber la utilidad proyectada para los años 2000 a 2007. Los costos operacionales se han estimado que crecerán anualmente de acuerdo a las tasas indicadas en la tabla de costos.

Determine la proyección de utilidades para los años 2000 a 2007

Costos

Costos Operacionales		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Costos de operación									
Costos administrativos	0,005	12120	12181	12242	12303	12364	12426	12488	12551
Gastos generales	0,01	2266	2289	2312	2335	2358	2382	2405	2429
Pagos al MOP	0	300	300	300	300	300	300	300	300

Costos de mantención

conservación , mantención equipos y pistas		4200	8484	4242	8569	4284	4327	8741	4371

Depreciación lineal

Cuando una compañía compra equipo o maquinaria registra el valor de tal equipo como uno de los activos en un balance general. Al pasar los años este valor debe decrecer porque el equipo lentamente se desgasta o se hace obsoleto. Esta reducción gradual en el valor de un activo se conoce como *depreciación*. Uno de los métodos ordinarios para calcular la cantidad de depreciación es reducir el valor por una cantidad constante cada año, de tal manera que el valor se reduzca a valores de desecho al término de la vida útil estimada para el equipo. Esto se denomina *depreciación lineal*

Tasa de depreciación (por año)

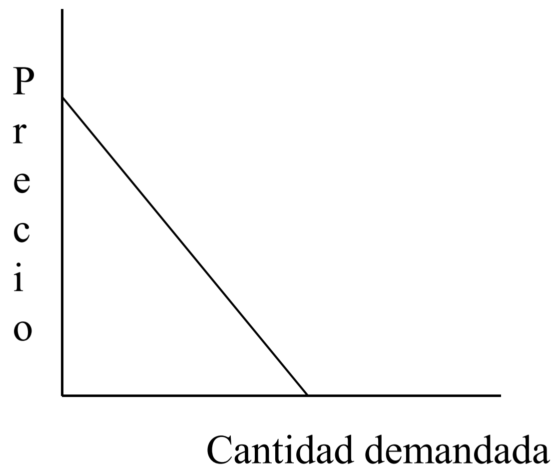
= (Valor inicial – Valor de desecho) ÷ (Vida útil en años)

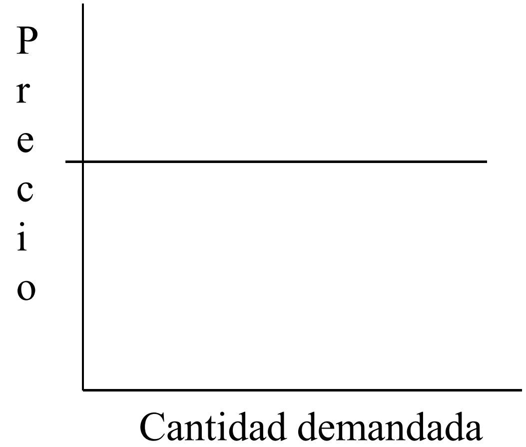
Ejercicio :Una empresa compra maquinaria por $150.000. Se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con valor de desecho cero. Determine la cantidad de depreciación por año y una fórmula para el valor depreciado después de *x* años.

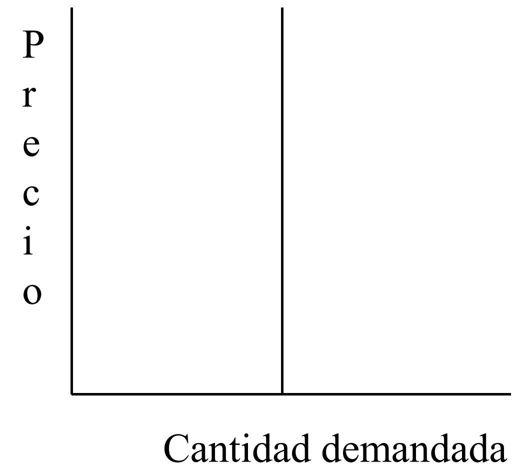
Funciones de oferta y demanda

En la práctica, algunas ecuaciones de oferta y demanda son aproximadamente lineales en el intervalo que importa; otras son no lineales.

Curvas de demanda lineal







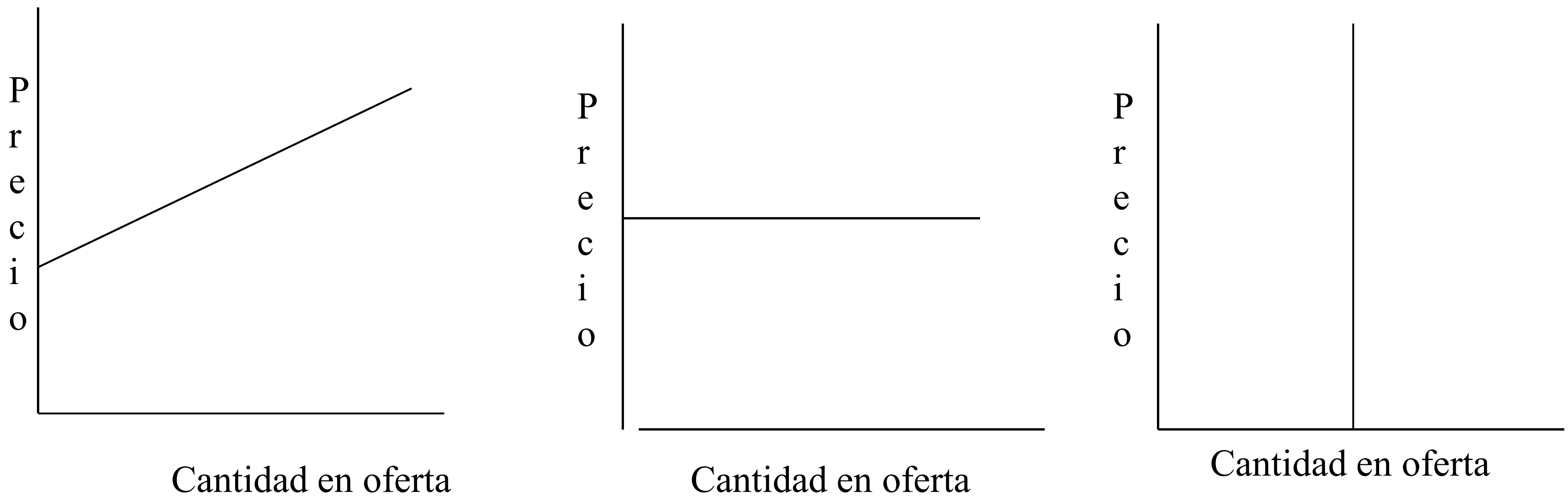
En el caso común, la pendiente de una curva de demanda es negativa es decir, a medida que el precio aumenta, la cantidad demandada decrece y viceversa. En algunos casos, la pendiente de una curva de demanda puede ser cero (precio constante). En otros casos la pendiente puede no estar definida (demanda constante sin importar el precio)

La curva de demanda por un bien indica las cantidades máximas del bien que un consumidor o grupo de consumidores desea comprar a diferentes precios, suponiendo que todos los factores ajenos al precio, que influyen sobre sus decisiones, no cambiarán (ingreso, gustos, precio de otros bienes). Alternativamente, puede definirse como el máximo precio que un consumidor o grupo de consumidores estarían dispuestos a pagar por cada cantidad demandada de un bien suponiendo que todo lo demás permaneciera constante.

Ejercicio: Cuando el precio es de $80 se venden 10 relojes y se venden 20 cuando el precio es de $60. ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

Ejercicio: Por considerarse necesarios para la seguridad nacional, se compran anualmente 50 grandes generadores, sin importar precio. ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

Curvas de Oferta lineal



En el caso más común, la pendiente de la curva de oferta es positiva, es decir, que al aumentar el precio aumenta la cantidad ofertada y decrece al decrecer el precio. En ciertos casos la pendiente de una curva de oferta puede ser cero lo que indica un precio constante e independiente de la oferta. En otros casos la pendiente puede no estar definida (oferta constante e independiente del precio)

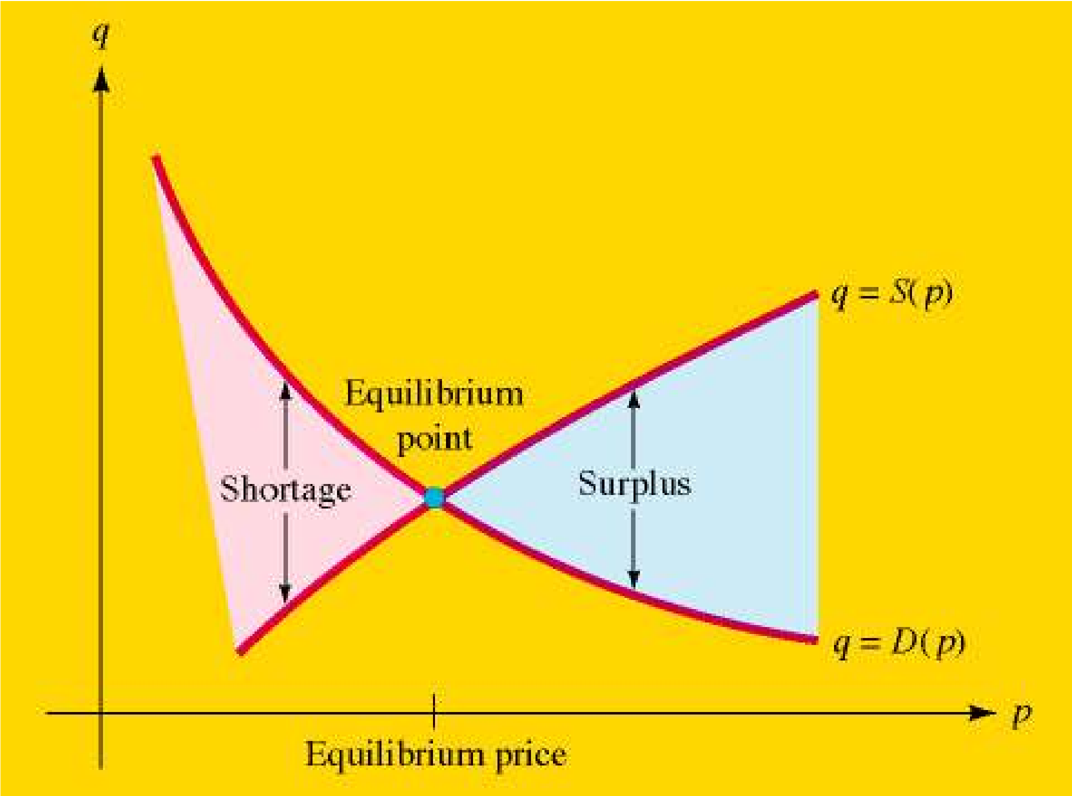
La curva de oferta es la relación entre el precio y la cantidad de un bien que los productores están dispuestos a producir.

Ejercicio: Cuando el precio es $50, hay disponibles 50 cámaras de un tipo dado para el mercado, cuando el precio es 75, hay disponibles 100 cámaras. ¿Cuál es la ecuación de la oferta?

Ejercicio: De acuerdo con el contrato entre la compañía A y la de teléfonos, la compañía A pagará a la de Teléfonos $500 al mes por las llamadas de larga distancia sin límite de tiempo. ¿Cuál es la ecuación de la oferta?

Equilibrio de mercado

Se dice que existe equilibrio del mercado en el punto en que la cantidad de un artículo demandado es igual a la cantidad en oferta. Así pues, si se usan las mismas unidades para x y para y en ambas ecuaciones, la cantidad en equilibrio y el precio de equilibrio corresponden a las coordenadas del punto de intersección de las curvas de oferta y demanda.



Ejemplo; Hallar el punto de equilibrio de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda

$$y = 10 - 2x \qquad\qquad y = \frac{3}{2}x + 1$$

Resolvamos las ecuaciones simultáneamente por sustitución

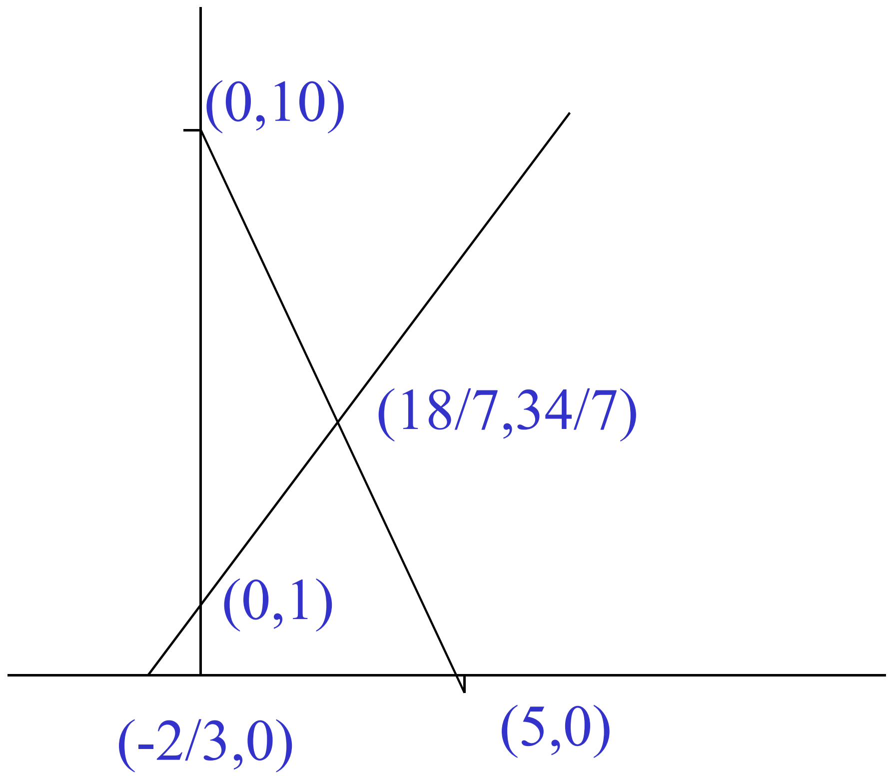
$$10 - 2x = \frac{3}{2}x + 1$$

$$\frac{7}{2}x = 9$$

$$x = \frac{18}{7}$$

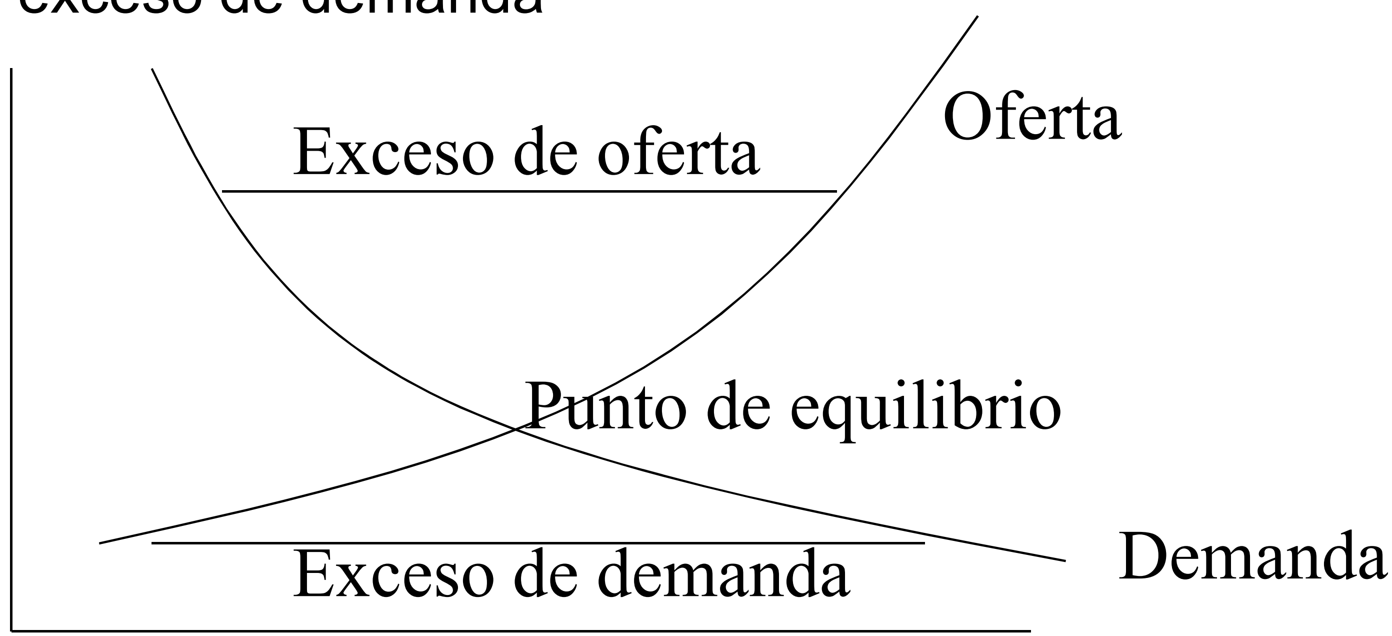
$$y = 10 - 2\left(\frac{18}{7}\right) = \frac{34}{7}$$

$$\text{Respuesta} \quad : \left(\frac{18}{7}, \frac{34}{7}\right)$$



Exceso de oferta y exceso de demanda

Cuando el mercado está fuera de su punto de equilibrio, digamos que el precio es mayor que el precio de equilibrio, entonces vemos que la cantidad ofrecida es mayor que la cantidad demandada. Dicho de otro modo hay una sobreoferta o exceso de oferta. Cuando el precio es menor que el precio de equilibrio entonces la cantidad demandada es mayor que la cantidad ofrecida, es decir, se tiene un exceso de demanda



Ejercicio:
Hallar el precio y la cantidad de equilibrio para las ecuaciones de oferta y demanda siguientes (en donde y representa precio y la cantidad x)

$$x^2 + 5x - y + 1 = 0$$

$$2x^2 + y - 9 = 0$$

Ejercicio: Determine la alternativa correcta
Considere la función de oferta Qs=200+2p y la función de demanda Qd=400-3p

a)El precio y la cantidad de equilibrio es P=40 u.m, Q= 280 u respectivamente

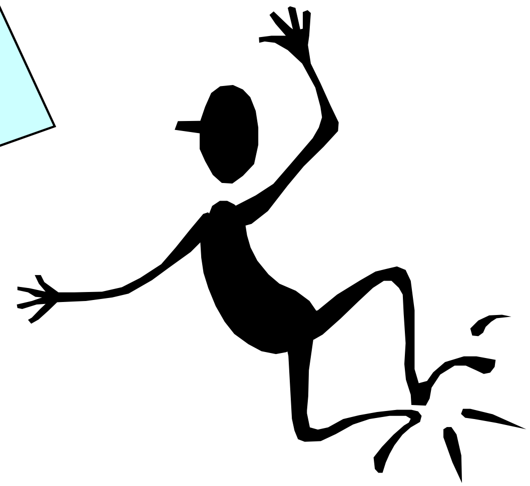
b)El precio que produce una escasez de oferta de 50 unidades es 30

c)Para un precio de 50 u.m se crea una situación de exceso de oferta

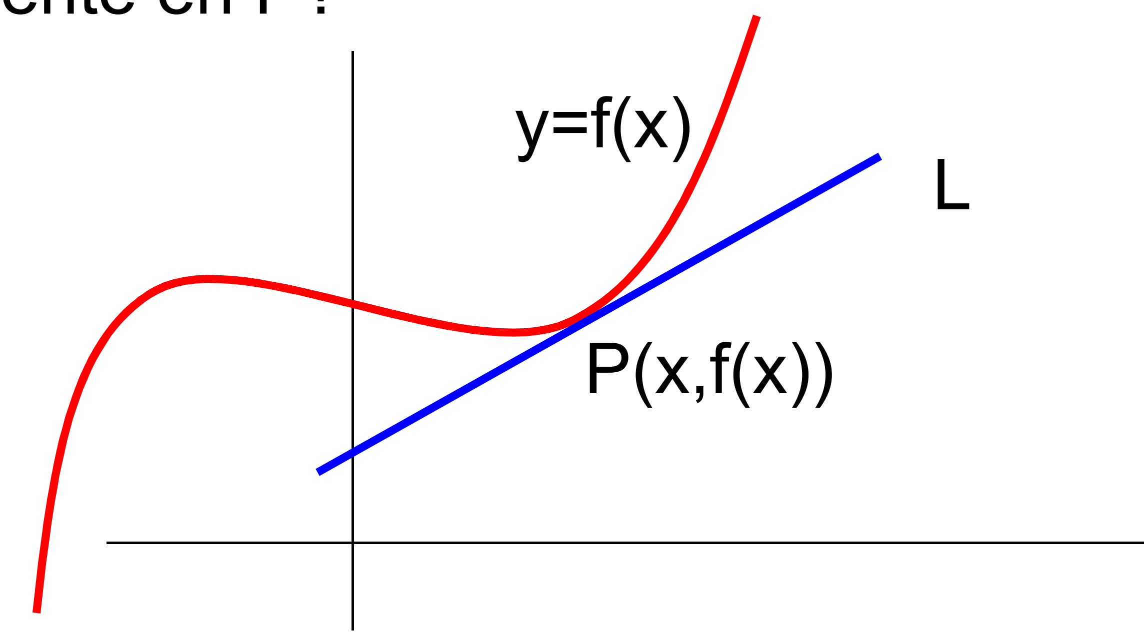
d)Todas las anteriores

La Derivada

El cálculo diferencial se centra en el concepto de derivada. La motivación original para la derivada fue el problema de definir las rectas tangentes a las gráficas de las funciones y el cálculo de las pendientes de dichas rectas. Sin embargo, la importancia de la derivada se basa en su aplicación a diversos problemas.



El problema de la tangente:
Dado un punto P(x,f(x)) sobre la curva y=f(x).
¿cómo calculamos la pendiente de la recta tangente en P?



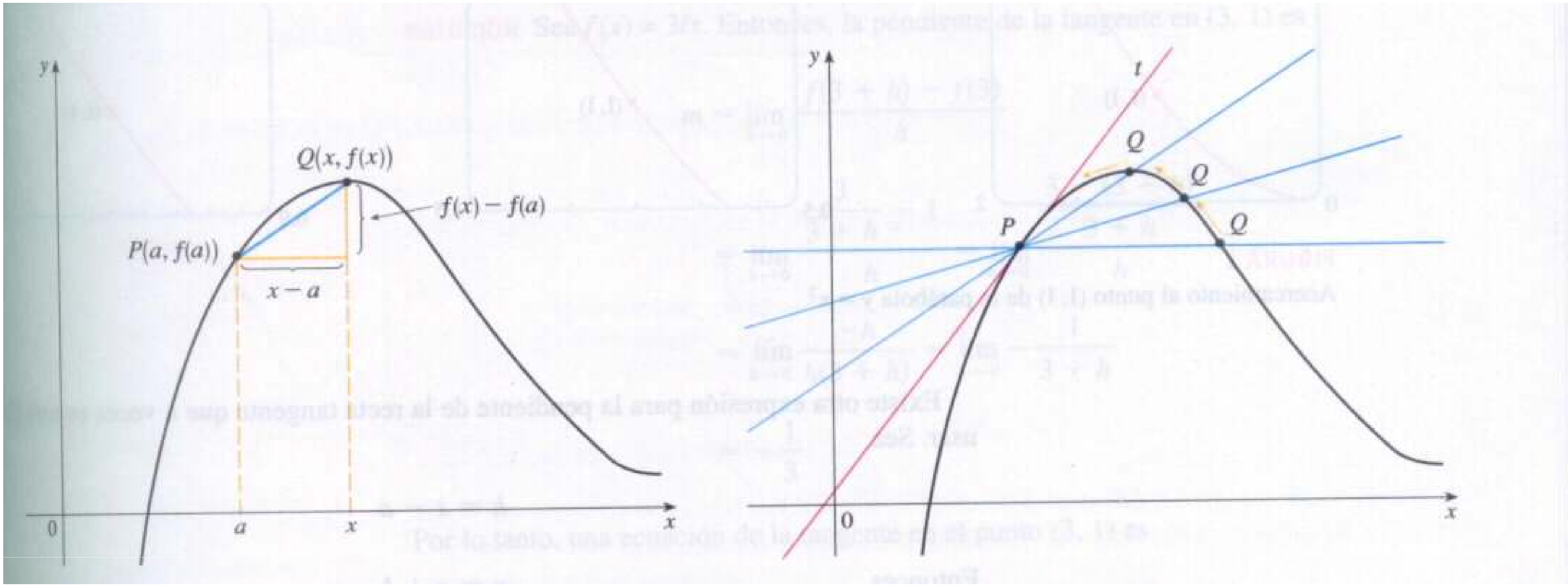
El problema de la tangente es un problema geométrico. Pero su respuesta (en la forma de derivadas) es la clave para la solución de diversos problemas de aplicación en muchas áreas científicas y técnicas. Los ejemplos siguientes sugieren las conexiones que son la clave para el papel fundamental del cálculo en la ciencia y tecnología

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación y = f(x) y deseamos determinar la tangente a C en el punto P(a,f(a)) nos fijaremos en un punto cercano , Q (x,f(x)) , con x ≠ a , para calcular la pendiente de la recta secante PQ.

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A continuación aproximaremos Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si la pendiente de la recta PQ tiende a un número m, definimos la tangente t como la linea que pasa por P con pendiente m. Esto significa que la recta tangente es la posición límite de la linea secante PQ cuando Q tiende a P (fig 1)

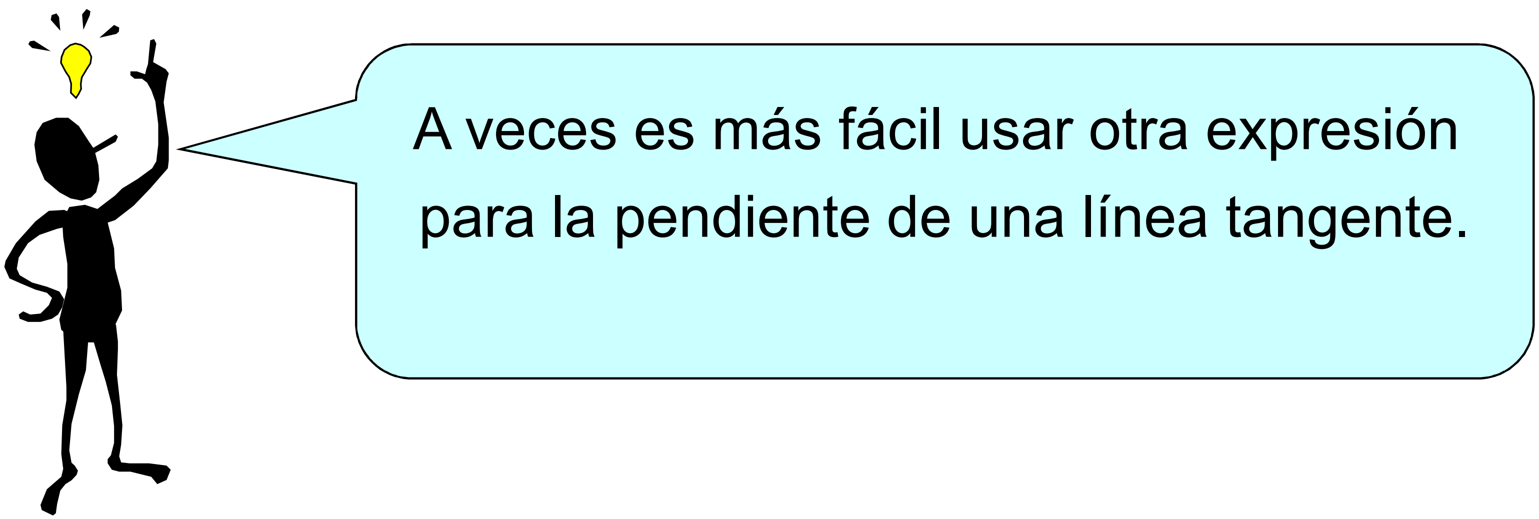


Definición 1: La linea tangente o recta tangente a la curva y=f(x) en el punto P(a,f(a)) es la linea que pasa por P cuya pendiente es

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

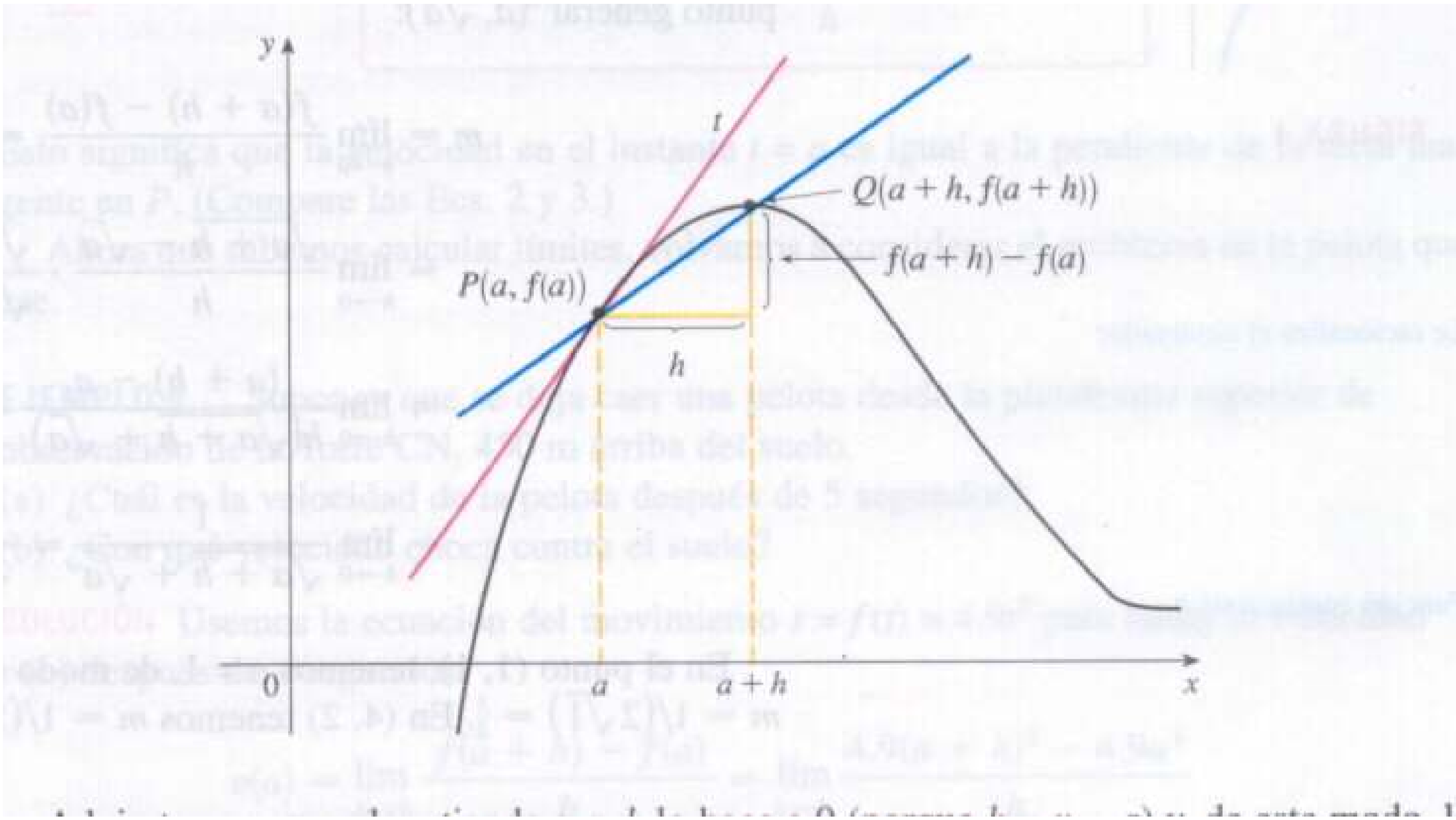
siempre que exista ese límite.

Ejercicio : Determine la ecuación de la recta tangente a la parábola y $=5x^2$ en el punto P(1,5)



Sea h=x-a entonces x=a+h de modo que la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Notemos que cuando

$$x \to a \qquad \text{entonces} \quad \mathrm{h} \to 0$$

así la pendiente de la tangente se transforma en

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivadas

Los límites con forma

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

surgen siempre al calcular una rapidez de cambio en cualquier ciencia o rama de la ingeniería , como la rapidez de reacción en química o un costo marginal en economía . Dado que este tipo de límite se presenta con suma frecuencia , se le da un nombre y una notación especial.

Definición 2: La derivada de la función f en un número a representada por f ’(a), es

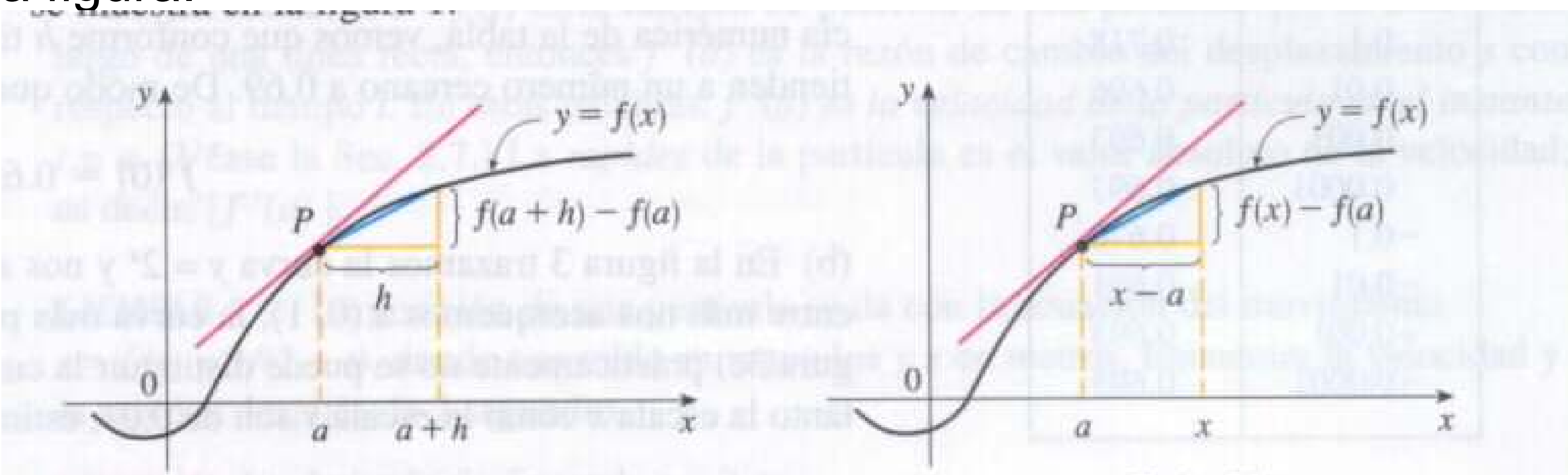
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

en caso de existir ese límite.

Interpretación de la derivada como pendiente de una tangente

Podemos decir que la recta tangente a y = f(x) en (a,f(a)) es la línea que pasa por (a,f(a)) cuya pendiente es igual a la derivada de f en a, es decir f’(a) .

Así , la interpretación geométrica de una derivada es lo que registra la figura.



(a) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

= pendiente de la tangente P

= pendiente de la curva en P

(b) $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

= pendiente de la tangente en P

= pendiente de la curva en P

Ecuación de la recta tangente

Si existe f'(a) entonces una ecuación de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto (a,f(a)) es la siguiente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejercicio: Determine la ecuación de la recta tangente a las curva $f(x)=2x^2$ en $x = 2$

Otras notaciones

Si empleamos la notación tradicional y = f(x) para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y , hay otras notaciones alternativas comunes de la derivada:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Podemos reformular la definición de derivada, en notación de Leibniz, como sigue

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si deseáramos indicar el valor de una derivada, dy/dx en notación de Leibniz en un número específico a, anotaríamos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{=a} \quad \text{o bien} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

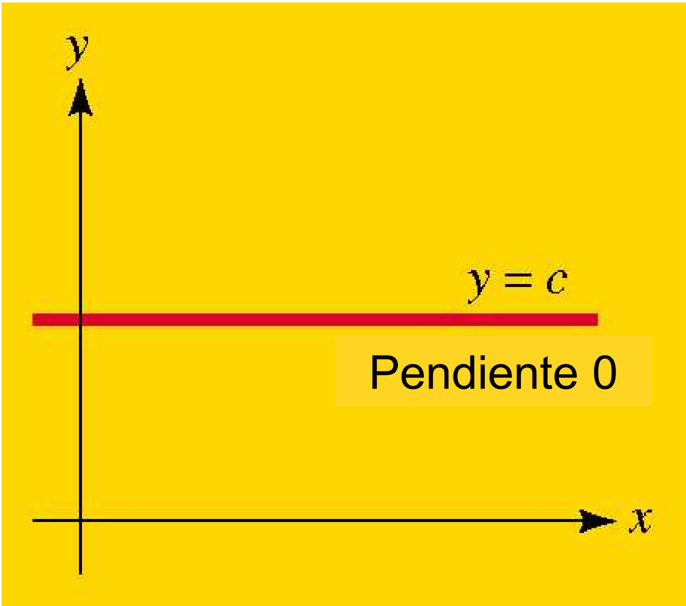
Fórmulas de diferenciación

Si se tuviera que usar la definición de límite cada vez que se deseara calcular una derivada, sería tedioso y difícil para utilizar el cálculo en las aplicaciones. Por fortuna, se han desarrollado varias reglas para hallar derivadas.

Teorema: Si f es una función constante , f(x) = c , entonces f’(x) = 0.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$



Regla de potencias:

Si $f(x) = x^n$, en donde n es un número real,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplos:

$$\frac{d}{dx}(x^6) = 6x^{6-1} = 6x^5$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-5}\right) = -5x^{-6}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejercicio: ¿En qué puntos de la hipérbola xy=18 la recta tangente es paralela a la recta 2x+y=1

Álgebra de Derivadas

Teorema: Suponga que c es una constante y que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen.

a) Si $F(x) = cf(x)$, entonces $F'(x)$ existe y $F'(x) = cf'(x)$.

b) Si $G(x) = f(x) + g(x)$, entonces $G'(x)$ existe , y
. $G'(x) = f'(x) + g'(x)$

c) Si $H(x) = f(x) – g(x)$, entonces $H'(x)$ existe y
. $H'(x) = f'(x) – g'(x)$.

En resumen:

a) $(cf)' = cf'$ b) $(f +g)' = f' + g'$ c) $(f - g)' = f' - g'$

Notación de Leibniz

$$a)\ \frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx} \qquad \text{b)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$c)\ \frac{d}{dx}(f-g) = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$$

Ejercicio: Derive

$$f(x) = 4x^5 + 3x^3 - 6x^2 + x + 1$$

$$g(x) = \sqrt[5]{x^2} + x^{-2/3} + 5x^3 + 5$$

$$h(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

Nota: Al combinar la regla de potencias, la regla del múltiplo constante y la regla de la suma se puede derivar cualquier polinomio

Regla del producto:

Si F(x) = f(x)g(x) y existen f'(x) y g'(x) a la vez , entonces

$$F'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Ejercicio: Derive

$$f(x) = x^4 . \sqrt{x^3} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} \, ..x^3$$

Regla del cuociente:

Si F(x) = f(x)g(x) y existen f'(x) y g'(x) a la vez , entonces existe F'(x) y

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Ejercicio: Derive

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad , \quad g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4} \quad , \quad h(x) = \frac{x^{-4/7}}{3x}$$

Otras derivadas fundamentales

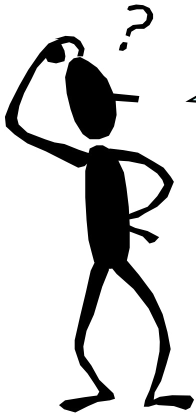
$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Regla de la cadena



¿Cómo derivamos la función?

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Con las fórmulas de derivación que hemos aprendido no podemos determinar F'(x).

Observamos que F es una función compuesta .

Si hacemos y = f(u) = $\sqrt{u}$ donde u = g(x) = x^2 + 1 , podremos escribir

y = F(x) = f(g(x)); esto es , F = fog .

Sabemos cómo diferenciar f y g , de modo que sería conveniente contar con una regla que nos diga cómo hallar la derivada de F = fog en términos de las derivadas de f y g.

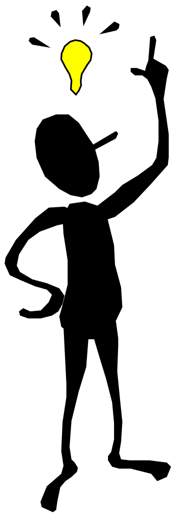
Regla de la cadena

Si existen a la vez derivadas g'(x) y f'(g(x)) y si F = fog es la función compuesta definida por F(x) = f(g(x)) , entonces F'(x) existe y está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si y = f(u) y u = g(x) son dos funciones diferenciables , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$



Si $F(x)=\sqrt{x^2+1}$ entonces

$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejercicio: Derive

$$h(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$

$$j(x)=\frac{x^3+2x}{\sqrt{x+5x+2}}+\ln(x^2)$$

$$k(x)=x^3\ln(x+1/x)$$

Derivadas de Orden Superior

Si f es una función diferenciable , su derivada f´ también es una función , así que f´ puede tener una derivada por derecho propio. Dicha derivada se representa como

(f ‘)’=f’’. Esta nueva función , f ‘, se llama segunda derivada de f , por serlo de la derivada de f; esto es,

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^8,\ f'(x) = 8x^7 \qquad f''(x) = 56x^6$

Notación: si y = f(x),

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 f(x) = D_x^2 f(x)$$

Aplicaciones

Elasticidad de la demanda

La elasticidad de la demanda mide la sensibilidad de la demanda ante variaciones porcentuales en el precio y se calcula según la expresión

$$e_D = -\frac{dQ}{dp} \cdot \frac{P}{Q} \cdot$$

Puesto que la curva de demanda es decreciente, la derivada será siempre negativa.
Por comodidad no se utilizan elasticidades negativas, por eso se multiplica toda la expresión por -1.

Análisis marginal

El análisis marginal es el estudio de la razón de cambio de cantidades económicas. En economía, el uso de la derivada para aproximar el cambio producido en una función por un cambio de 1 unidad en su variable se denomina análisis marginal.

Ejemplo; Supóngase que el costo total semanal, en dólares, de producción de x refrigeradores por la compañía REFRIG está dado por la función de costo total

$$C(x) = 8000 + 200x - 0{,}2x^2 \quad , \; 0 \le \text{x} \le 400$$

a)¿Cuál es el costo real de la producción del refrigerador 251?
b) ¿Cuál es la razón de cambio del costo total con respecto de x cuando x=250?
C) Comparar los resultados obtenidos en (a) y (b)

Solución:

a) El costo total de producción del refrigerador 251 es la diferencia entre el costo total de producción de los primeros 251 refrigeradores y el costo total de producción de los primeros 250 refrigeradores

$$C(251) - C(250) = \left[8000 + 200(251) - 0{,}2(251)^2\right] - \left[8000 + 200(250) - 0{,}2(250)^2\right]$$
$$= 45599{,}8 - 4550 = 99{,}8$$

b) La razón de cambio de la función de costo total C en relación con x está dada por la derivada de C, es decir; $C'(x)=200-0{,}4x$. Así, cuando el nivel de producción es de 250 refrigeradores, la razón de cambio de la función de costo total con respecto de x está dado por

$$C'(250)=200-0{,}4(250)=100$$

Por la solución de a), se sabe que el costo real de producción del refrigerador 251 es \$99,8. Esta respuesta es muy cercana a la respuesta b). Para ver por qué es esto, obsérvese que la diferencia C(251)-C(250) se puede escribir en la forma

$$\frac{C(251)-C(250)}{1}=\frac{C(250+1)-C(250)}{1}$$
$$=\frac{C(250+h)-C(250)}{h}$$

Donde h=1. En otras palabras, la diferencia C(251)-C(250) es la razón de cambio promedio de la función de costo total C en el intervalo [250,251] , o en forma equivalente, la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (250, 45500) y (251, 45599,8). Por otro lado, el número C'(250)=100 es la razón de cambio instantánea de la función de costo total C en x=250, o de manera equivalente, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de C en x=250.

Cuando h es pequeña, la razón de cambio promedio de la función C es una buena aproximación de la razón de cambio instantánea de la función C

Si y=f(x)   y Δx representa un cambio pequeño en x, entonces el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

O en notación funcional, el cambio correspondiente en f es

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

Es decir, el cambio en la función equivale aproximadamente a la derivada de la función multiplicada por el cambio en su variable. Notemos que

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x)$$

Costo marginal e Ingreso marginal

Si C(x) es el costo total de producción en que incurre un fabricante cuando produce x unidades y R(x) es el ingreso total obtenido de la venta de x unidades, entonces C'(x) se denomina **costo marginal** y R'(x) se denomina **ingreso marginal**.

Si la producción se incrementa en 1 unidad, entonces $\Delta x=1$ y la fórmula de la aproximación

$$\Delta C = C(x+\Delta x) - C(x) \approx C'(x)\Delta x$$

se convierte en $\Delta C = C(x+1) - C(x) \approx C'(x)$

mientras que $\Delta R = R(x+\Delta x) - R(x) \approx R'(x)\Delta x$

se convierte en $\Delta R = R(x+1) - R(x) \approx R'(x)$

Es decir, el costo marginal C'(x) es una aproximación al costo C(x+1)-C(x) de producir la unidad x+1 y de igual manera, el ingreso marginal R'(x) es una aproximación al ingreso obtenido de la venta de la unidad x+1

Ejercicio:

Un fabricante estima que cuando se producen x unidades de determinado artículo, el costo total será

$$C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$$

y además p(x)=1/3(75-x) dólares por unidad es el precio al cual se venderán las x unidades

a) Hallar el costo y el ingreso marginales

b) Emplear el costo marginal para calcular el costo de producir la novena unidad

c) ¿Cuál es el costo real de producir la novena unidad

d) Utilizar el ingreso marginal para calcular el ingreso obtenido de la venta de la novena unidad

e) ¿Cuál es el ingreso real obtenido de la venta de la novena unidad?

Función de costo promedio

*El **costo medio** es el costo total dividido por la cantidad producida: .*

$$CMe = \frac{C}{q}$$

*El **coste medio por unidad adicional** mide la variación que experimenta el costo total ante un incremento de la cantidad producida:*

por unidad adicional =

.

$$CMe \text{ por unidad adicional} = . \frac{\Delta C}{\Delta q}$$

Ejercicio: Si la función de costo promedio es

$$\overline{C(x)} = 20 + \frac{400}{x}$$

Calcule la función costo marginal

Función de costo promedio

Ejemplo: La función de costo de un determinado producto es

$$C(q) = 0{,}02q^2 + 0{,}1q + 30$$

donde q es el número de unidades fabricadas. Si actualmente se fabrican 25 unidades y se desea aumentar la producción a 40 unidades, ¿en qué cuantía se incrementará el costo? Calcule el costo medio por artículo si se producen 40 unidades.
Determine el coste medio por unidad adicional fabricada entre 25 y 40 unidades.
Calcule el coste marginal cuando se producen 25 y 40 unidades.

Función de costo promedio

a) $\Delta q = 15$ $\Delta C = C(q + \Delta q) - (q) = C(40) - C(25) = 66 - 45 = 21\ u.m.$

b) Coste Medio = $\dfrac{C(40)}{40} = \dfrac{66}{40} = 1{,}65\ u.m.$

c) $\dfrac{\Delta C}{\Delta q} = \dfrac{21}{15} = 1{,}4\ u.m.$

El costo aumenta en un promedio de 1,4 unidades monetarias por unidad producida adicionalmente para ese intervalo de producción.

d) $CMg(q) = C'(q) = 0{,}04q + 0{,}1\ u.m.\ Por\ ello:$

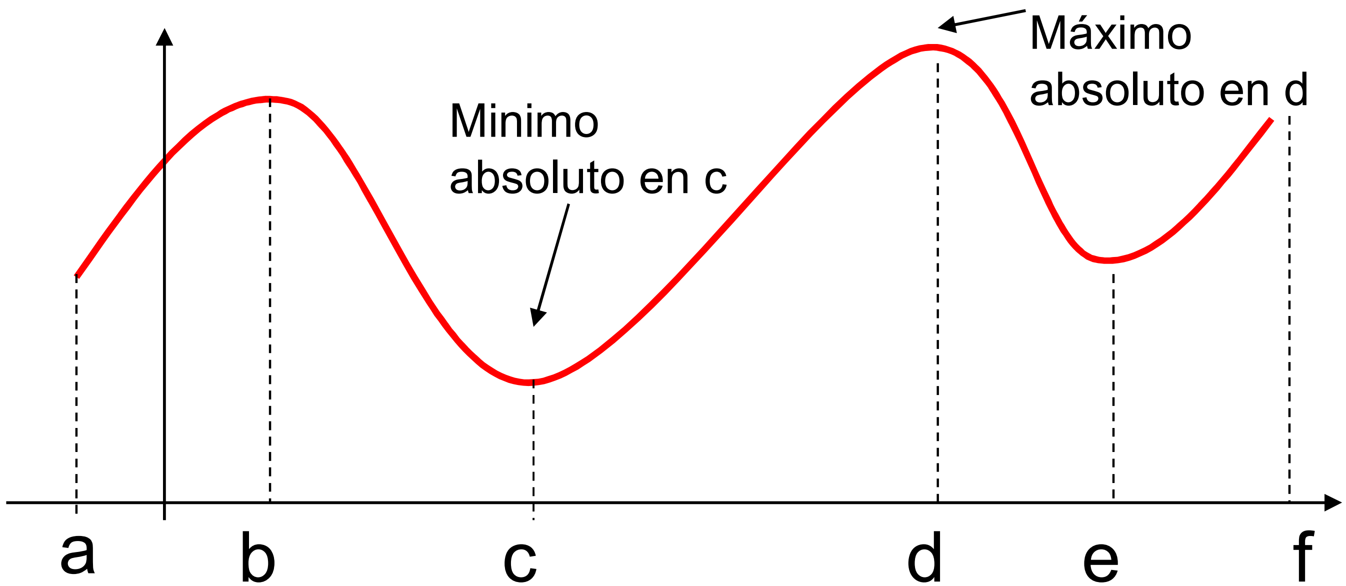
$$CMg(q = 25) = 1{,}1\ u.m$$

$$CMg(q = 40) = 1{,}7\ u.m.$$

Valores Máximos y Mínimos

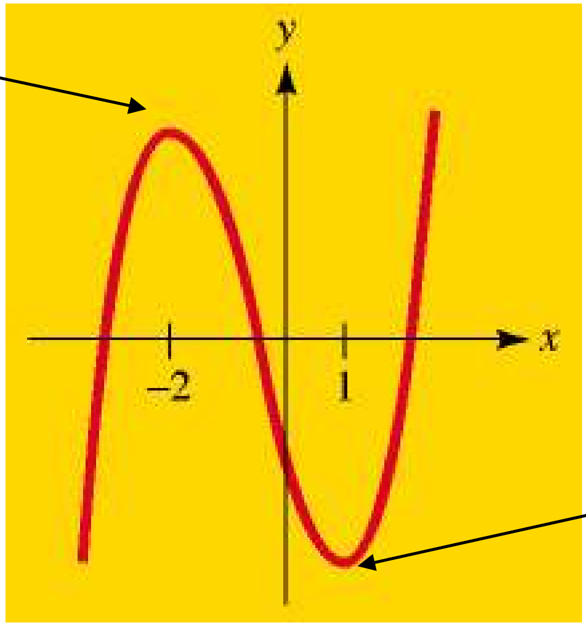
Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los problemas de optimización, en que se nos pide determinar el monto óptimo (el mejor) de llevar a cabo algo. En muchos casos estos problemas se pueden reducir al encontrar el valor máximo o mínimo de una función

Definición: Una función f tiene un **máximo absoluto** en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en D, donde D es el dominio de f. El número f(c) se llama **valor máximo** de f en D. Igualmente , f tiene un mínimo absoluto en c si $f(c) \leq f(x)$, para todo x en D, y el número f(c) denomina **valor mínimo** de f en D. Los valores máximo y mínimo de f se conocen como **valores extremos** de f.



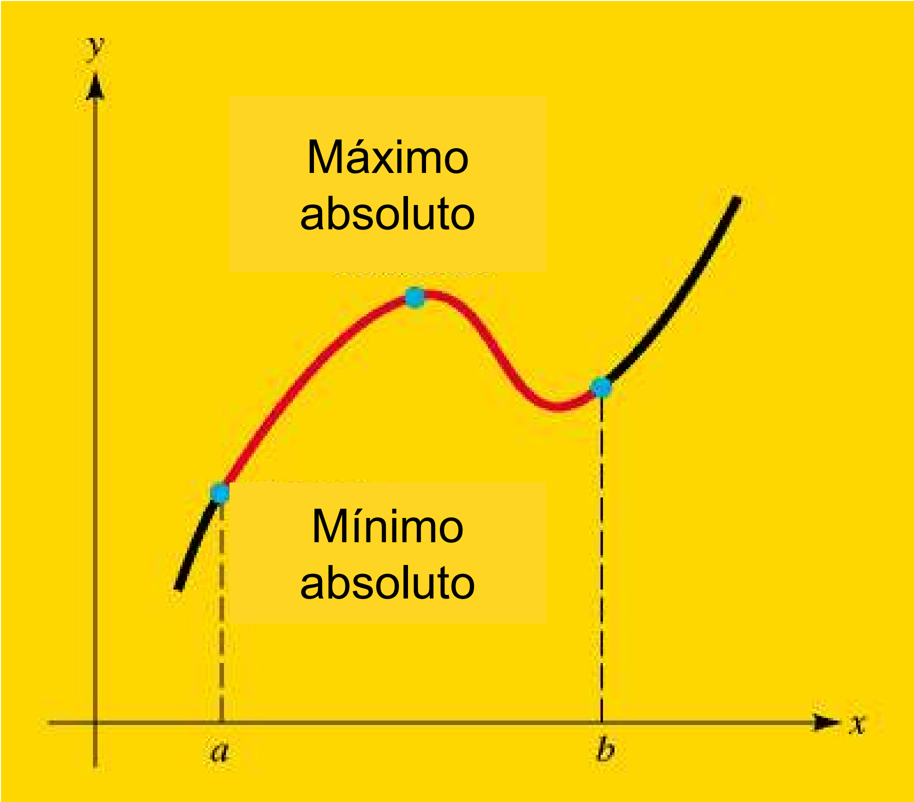
Definición: Una función f tiene un máximo local (o máximo relativo) en c si hay un intervalo abierto I que contiene a c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x en I. Asimismo, f posee un mínimo local en c (o mínimo relativo) si existe un intervalo abierto, I que contenga a c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x en I.

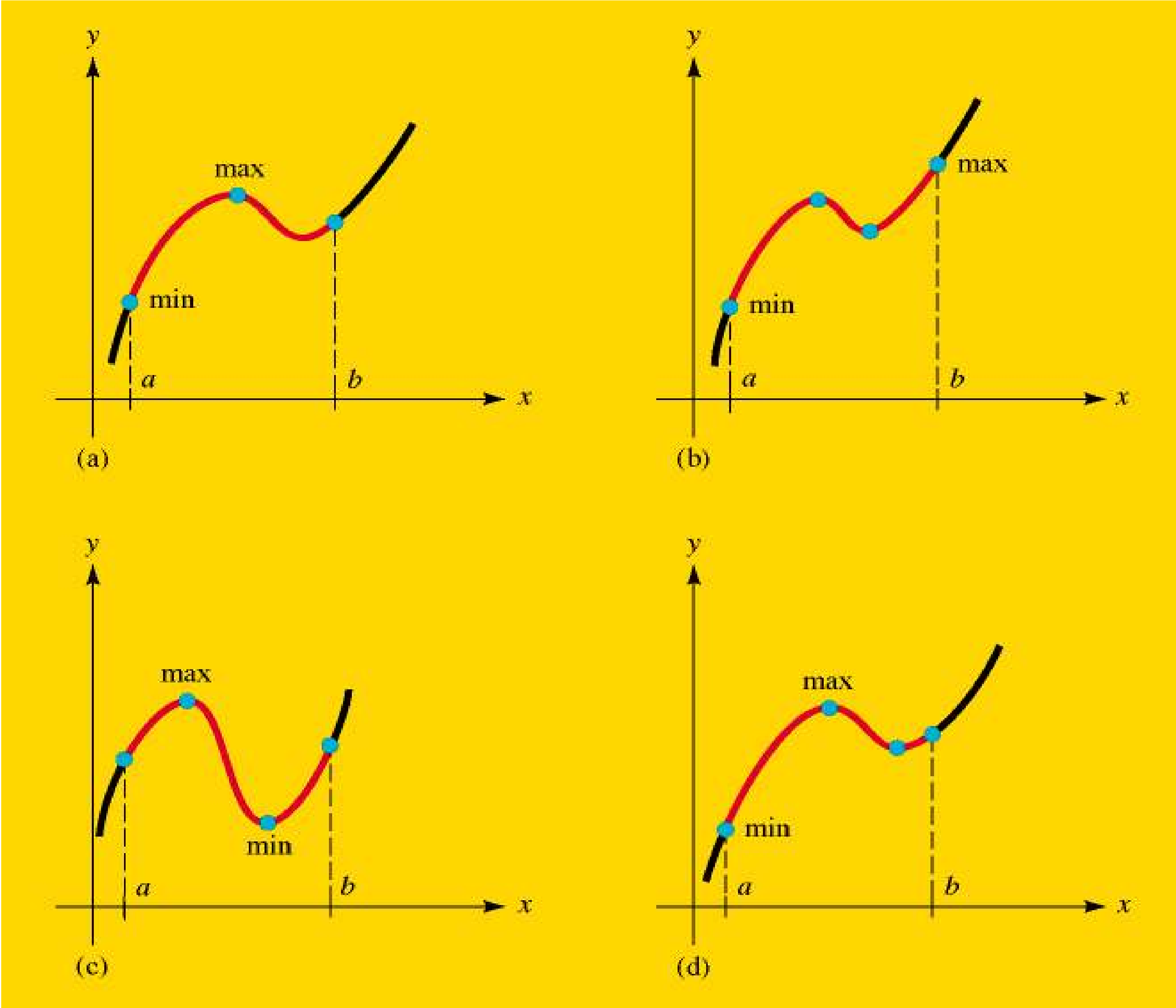
Máximo local en -2



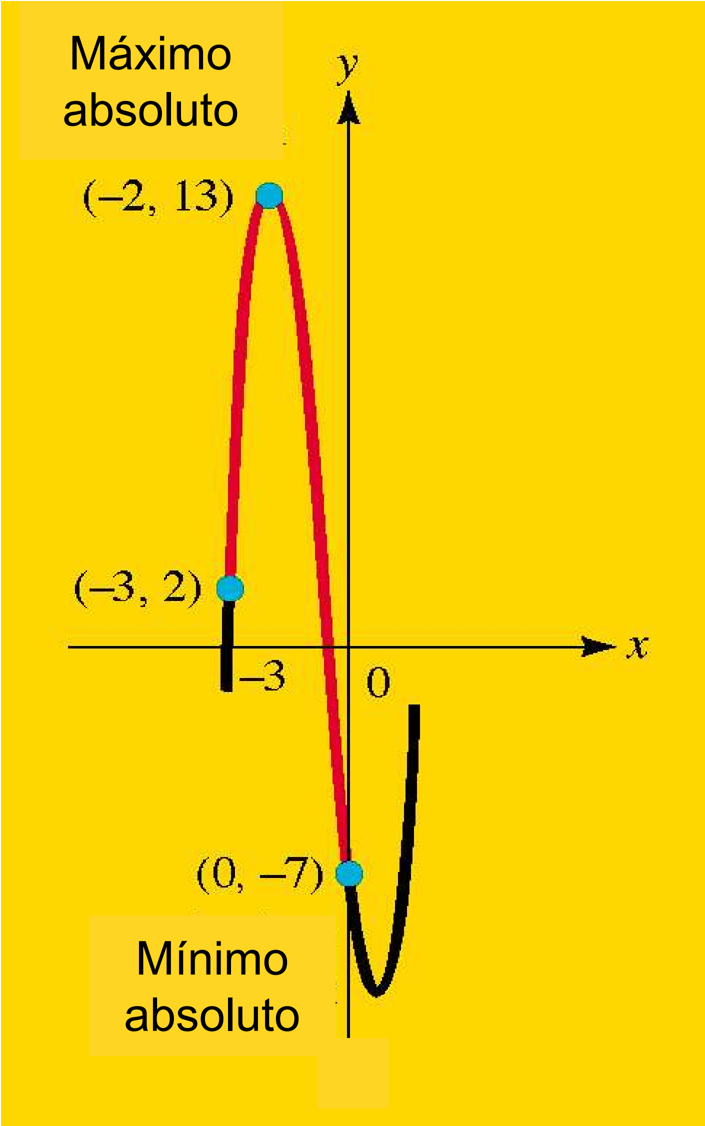
Mínimo local en 1

Teorema del valor extremo: Si f es continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces f alcanza un valor máximo absoluto, f (c) , y un valor mínimo absoluto , f (d), en ciertos números, c y d en [a,b]




y
max
min
a
b
x
(a)
y
max
min
a
b
x
(b)
y
max
min
a
b
x
(c)
y
max
min
a
b
x
(d)

Extremos absolutos de $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ en $-3 \leq x \leq 0$.



Prueba de la primera derivada

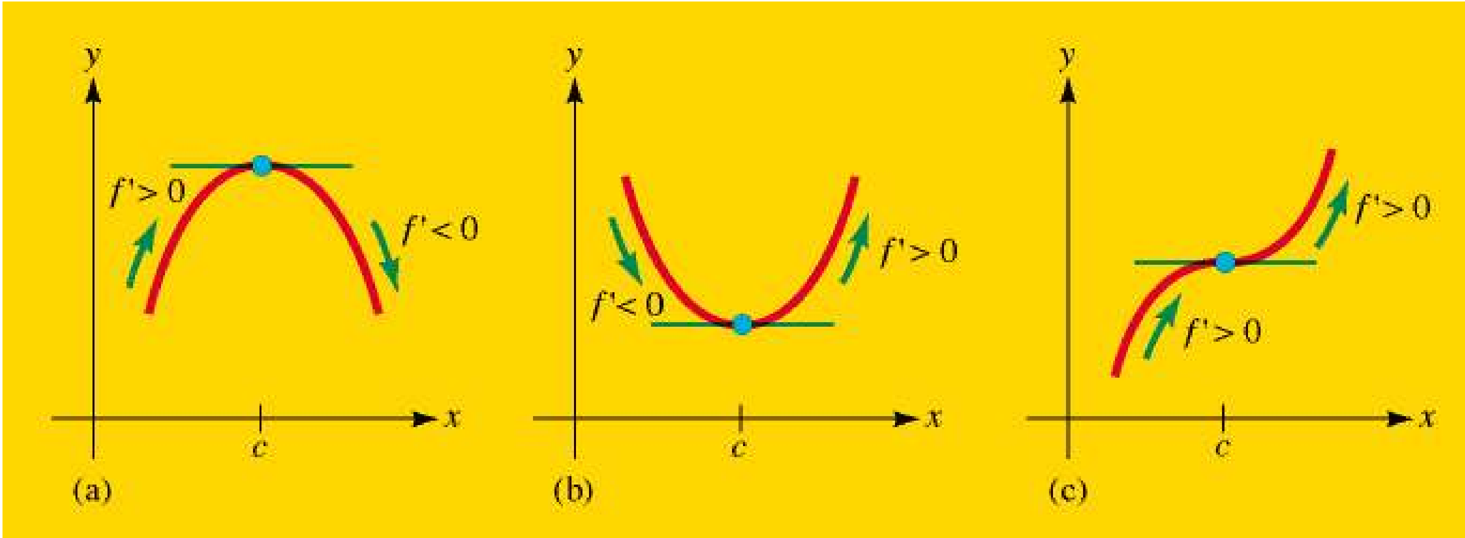
PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA

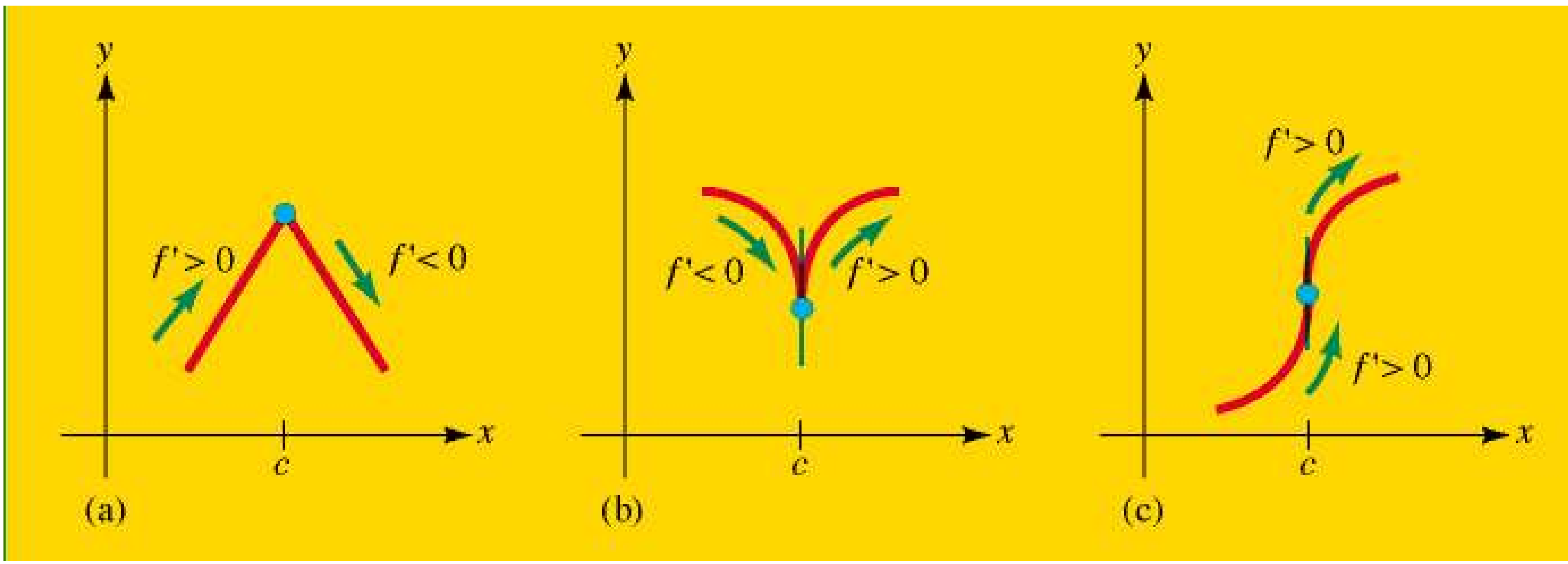
Si c es un número crítico de una función continua f.

a) Si f ` cambia de positiva a negativa en c , entonces f tiene un máximo local en c.

b) Si f ` pasa de negativa a positiva en c, entonces f posee un mínimo local en c.

c) Si f ` no cambia de signo en c (esto es , f ` es positiva en ambos lados de c , o negativa en ambos lados) , f carece de extremo local en c


y
x
c
f' > 0
f' < 0
(a)
y
x
c
f' < 0
f' > 0
(b)
y
x
c
f' > 0
f' > 0
(c)

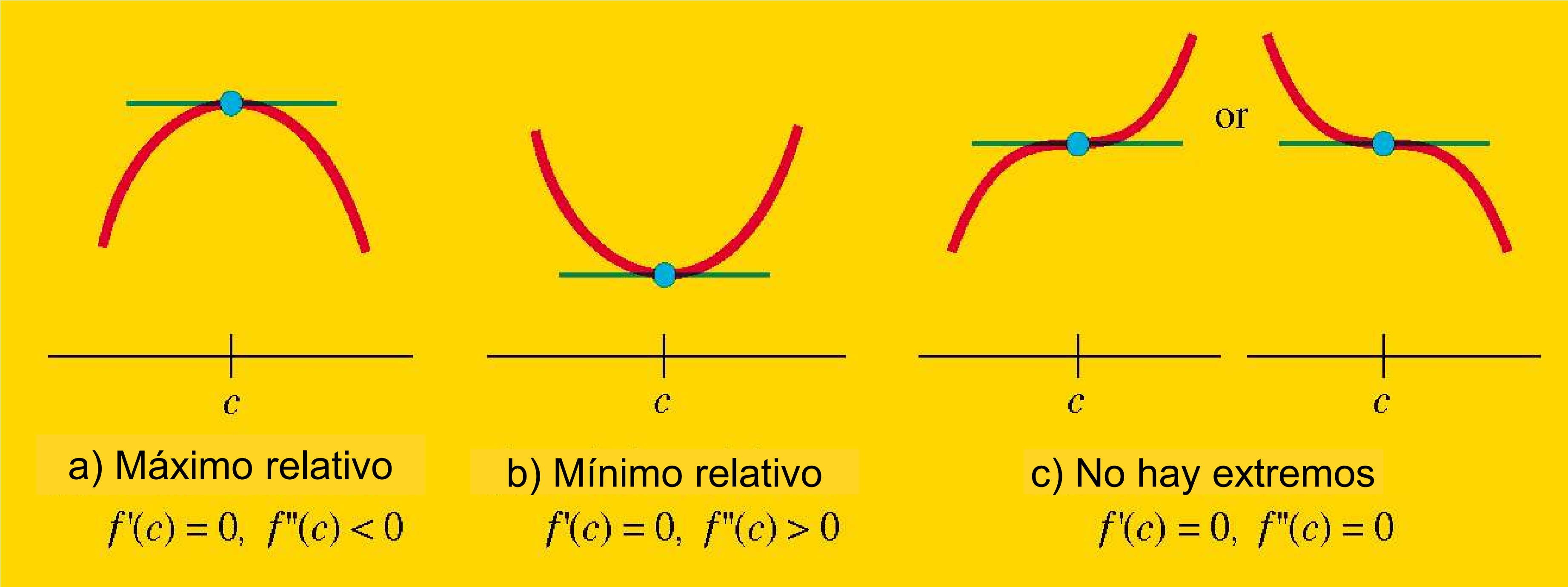

y
x
c
f' > 0
f' < 0
(a)
y
x
c
f' < 0
f' > 0
(b)
y
x
c
f' > 0
f' > 0
(c)

PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA:

Si f `` es continua en un intervalo abierto que contiene a c.

a) Si f `(c) = 0 y f ``(c) > 0 tiene un mínimo local en c.

b) Si f `(c) = 0 y f ``(c) < 0 posee un máximo local en c.



Ejercicio: Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de \$6 cada uno. El costo de producir x artículos a la semana (en dólares) es

$C(x)= 1000+6x-0.003x^2+10^{-6}x^3$

¿Qué valor de x debemos seleccionar con objeto de maximizar las utilidades?

Ejercicio (Publicidad y ganancias) Una compañía obtiene una utilidad de \$5 por cada artículo de su producto que vende. Si gasta A dólares por semana en publicidad, el número de artículos que vende por semana está dado por

$$x = 2000\left(1 - e^{-kA}\right)$$

en donde k=0,001 .Determine el valor de A que maximiza la utilidad neta.

Ejercicio: El nivel óptimo de producción

El análisis marginal es útil cuando uno quiere determinar el nivel óptimo de producción. Un criterio para esto es maximizar las utilidades. Si I es la función de Ingreso y C es la función de Costo entonces la utilidad es
U(q)= I(q)-C(q)

En el punto de máxima utilidad las pendientes del gráfico de la función de ingreso es igual a la pendiente del gráfico de la función de costo, entonces en el punto de máxima utilidad se tiene CM=IM o C'(q)=I'(q)

Ejercicio: Encontrar la cantidad q que maximiza las utilidades cuando el costo y el ingreso están dados por las expresiones siguientes

$$I(q) = 5q - 0{,}003q^2$$
$$C(q) = 300 + 1{,}1q$$

II. PROGRESIONES Y PROBLEMAS DE DECISIONES DE INVERSIÓN

Contenidos:

- ***Concepto de Progresión Aritmética y Geométrica con aplicaciones a las fórmulas financieras.***
- ***Tasas simple, compuesta, tasas equivalentes, tasas reales y nominales.***
- ***Valor presente y Valor futuro.***
- ***Cuotas y aplicaciones.***
- ***VAN.***

Progresiones Aritméticas

Si ahorramos 1 peso hoy, 2 pesos mañana, 3 pesos al día siguiente, etc ¿ A cuánto ascenderá nuestro ahorro en 365 días?

Definición: Una sucesión se dice que es una **progresión aritmética** (PA) si la diferencia entre cualquier término y el anterior es la misma a lo largo de toda la sucesión. La diferencia algebraica entre cada término y el anterior se denomina **diferencia común** y se denota por *d.*

La sucesión del problema introductorio corresponde a la PA; 1,2,3,4,5,6,.......365

Si *a* es el primer término y *d* es la diferencia común de una PA, los términos sucesivos de la PA son

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d, \ldots$$

El n-ésimo término está dado por la fórmula

$$\boxed{T_n = a + (n-1)d.}$$

Interés simple:
Es el interés que se paga (o gana) sólo sobre la cantidad original que se invierte. De otra forma es aquel que no considera reinversión de los intereses ganados en periodos intermedios

Sea P una cantidad de dinero invertida a una tasa de interés anual del R por ciento. En un año la cantidad de interés ganada está dada por $P+I$ donde $I=(R/100)P$

Si la inversión es a *interés simple*, debe agregarse una cantidad I a su valor al término de cada año. Así que, después de un año el valor será $P+I$, después de 2 años $P+2I$, etc.

La sucesión de valores anuales de la inversión,

$$P,\ P + I,\ P + 2I,\ P + 3I,\ ..$$

.

forman de esta manera una progresión aritmética cuyo primer término es P diferencia común I. Después de n años el valor está dado por $P + nI.$

Ejercicios ***(Interés simple)***

1.-Se invierte una suma de \$3.000 con interés simple a una tasa de interés anual del 12%. Encuentre una expresión para el valor de la inversión t años después de que se realizó. Calcule el valor después de 6 años.

2.- Cuánto debe invertirse ahora con un tipo de interés del 13% simple trimestral para disponer de dos millones y medio de pesos dentro de tres años?

Suma de una PA

Si *Sn* denota la suma de *n* términos de una PA con diferencia d entonces,

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + (n - 1)d).$$

Escribiendo esta progresión en orden inverso y sumando ambas expresiones, obtenemos la suma de una PA

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + (n - 1)d).$$

$$S_n = (a + (n - 1)d) + ... + (a + 2d) + (a + d) + a$$

Teorema 1 La suma de n términos de una PA con primer término *a* y diferencia común *d* está dada por

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right].$$

También podemos escribir esta fórmula como

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a + T_n\right) \text{en donde } \mathrm{T_n} = a + \left(n-1\right)d.$$

Volviendo al problema inicial, respondamos a la pregunta ¿ a cuánto ascenderá nuestro ahorro en 365 días?

Progresiones Geométricas

Es asombroso ver qué tan rápidamente crecen los términos de una sucesión en la que cada término es doble del anterior.

Si alguien accediera a donar 1 peso hoy, 2 mañana, 4 pasado mañana y así sucesivamente ¡ Cuesta creer que el donante tenga que dar más de un millón al cabo de 20 días!

La sucesión correspondiente a este problema es ;
1,2,4,8,16,..........

Definición: Una sucesión de términos es una **progresión geométrica** (PG) si la razón de cada término al término anterior es siempre la misma. Esta razón constante se denomina **razón común** de la PG.

Cada término de una PG se obtiene multiplicando al anterior por la razón común. Si *a* es el primer término y *r* es la razón común, los términos sucesivos de la PG son

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

El n-ésimo término está dado por

$$T_n = ar^{n-1} \qquad (1)$$

Suma de una PG

Si *a* es el primer término y *r* la razón común de una PG, entonces la suma Sn de *n* términos de la PG

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-2} + + ar^{n-1}.$$

está dada por

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \qquad (2)$$

Observación *La fórmula anterior para* Sn *es válida sólo cuando* r $\neq$ *1. Si r* = 1*, la PG se transforma en*

$$a + a + a + \ldots + a \qquad (n \text{ términos})$$

cuya suma es igual a *na*.

Ahora aplicando la fórmula (2) podemos comprobar que la suma de los primeros 20 términos de la sucesión 1, 2, 4, 8.,16..... corresponde a

$$S_{20} = \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 1.048.575$$

Interés compuesto:
Significa que el interés ganado sobre el capital invertido se añade al principal. Se gana interés sobre el interés. De otra forma se asume reinversión de los intereses obtenidos en periodos intermedios

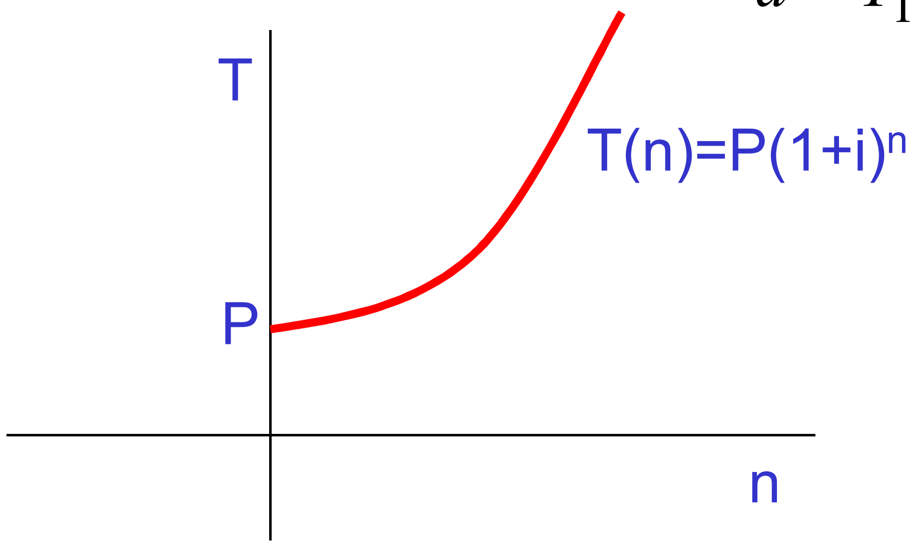
Ejercicio- Una cuenta de ahorros produce 5% de interés compuesto anualmente. Si invierte x dólares en esta cuenta, entonces el monto P(x) de la inversión después de un año es la inversión inicial más 5%; esto es $P(x)=x+0{,}05x=1{,}05x$.
Determine una fórmula para el valor de la inversión después de n años.

Si una suma P se invierte a una tasa de interés del R por ciento anual compuesto, el valor de la inversión al término del n-ésimo año está dada por la fórmula

$$T_n = P(1+i)^n, \qquad i = \frac{R}{100}$$

Estos valores para n=1,2,3,,,,forman una sucesión que es una PG. La razón común es r= 1+i y el primer término es

$$a = T_1 = P(1+i)$$



Ejercicio: Si $2000 se invierten a un interés compuesto anual del 6%, encuentre el valor de la inversión después de 4 años.

Tasas equivalentes

Tasas equivalentes

Se dice que dos tasas son equivalentes si con diferentes periodos de capitalización, producen iguales intereses en el mismo plazo

Interés simple	*Interés compuesto*
$i_a = 12 * i_m$	$1 + \mathrm{i_a} = (1 + i_m)^{12}$
$i_a = 2 * i_s$	$1 + \mathrm{i_a} = (1 + i_s)^{2}$
$i_a = 4 * i_t$	$1 + \mathrm{i_a} = (1 + i_t)^{4}$

Valor actual y futuro del dinero

La mayoría de las inversiones cuantiosas de capital generan flujos de efectivo que duran varios años. El periodo en que se recibe el dinero es un aspecto importante de su valor. No debemos ser indiferente ante la opción de recibir 1000 dólares ahora o mil dólares en cinco años; incluso si en este momento no necesitamos los mil dólares, los podríamos invertir y tener mucho más de mil dólares en cinco años.

Un método general para resolver los problemas que comprenden flujos de efectivo en el tiempo consiste en convertir todos los flujos en sus equivalentes de valor actual, por medio de una tasa de interés o de descuento, y de cálculos de interés compuesto.

El valor actual de 1000 dólares que se recibirán dentro de cinco años con tasa de descuento del 15% es:

$$\frac{1000}{(1+0.15)^5} = 497.18$$

Si depositamos en el banco 497.18 dólares con tasa de interés del 15% (calculado anualmente), tendría mil dólares al término de cinco años.

En términos generales, el valor actual o valor presente de cualquier cantidad *A*, con tasa de descuento *r*, por recibirse en *n* años es:

$$VP = \frac{A}{(1+r)^n}$$

Si VP=M también se dice que A es el valor futuro de M después de n años a una tasa de interés r. Si hay una serie de flujos de efectivo a lo largo de varios años, entonces el valor actual de la serie es la suma del valor actual de cada uno de los flujos.

Así, el valor actual de 10 dólares que se reciben al final del año 1, más 20 dólares que se reciben al concluir el año 2, es:

$$\frac{10}{(1+0{,}15)^1} + \frac{20}{(1+0{,}15)^2} = 23{,}82$$

Valor futuro: Es el valor alcanzado por un capital o principal al final del periodo analizado.

Interés: Es el rendimiento o costo de un capital colocado o prestado a un tiempo determinado.

La **tasa de descuento** o costo del capital r es la rentabilidad mínima exigida por el inversionista a la inversión.
Para calcular el valor actual, descontamos los pagos futuros esperados a la tasa de rentabilidad ofrecida por alternativas de inversión comparables.

Se puede realizar decisiones de inversión comparando el valor presente o el valor futuro de las distintas alternativas.

Ejemplo:
¿Qué es mejor si la tasa de interés es 10%;
a)$2000 ahora o
b)$1150 un año más a partir de hoy y $900 en dos años más?

Ejercicio

Un comerciante de bienes inmuebles posee una propiedad que podría vender hoy por 100 millones de pesos. También, podría conservar la propiedad durante 5 años. Durante este tiempo, gastaría 100 millones en mejorarla, y la vendería entonces en 300 millones. Suponga que el costo de las mejoras sería gastado de una sola vez al término de tres años y debería tomarse prestado del banco a un interés del 12% anual pagaderos al cabo de 2 años. Determine qué alternativa representa la mejor estrategia para el comerciante, suponiendo una tasa de descuento del 10% anual.

Igualdad de Fischer y efecto de la inflación

- La inflación es el aumento sostenido y generalizado del nivel de precios.
- La inflación se mide a través del IPC
- Se puede definir el índice de precios al consumidor (IPC) como la relación que mide el valor o el costo de un determinado grupo de bienes en un período dado, en comparación con el valor del mismo grupo de bienes en un período base o período inicial.

Inflación y poder adquisitivo del dinero

Si existe inflación los pesos de hoy no comprarán las mismas cosas que en un año más

$1000/Po= Cantidad física = Xo

$1000/P1= Cantidad física = X1

Xo>X1

Esos $1000 nominalmente son iguales, en términos reales no lo son. No tienen el mismo poder adquisitivo

Tasa de interés real

Una tasa de interés real es aquella que denota un aumento del poder adquisitivo. Esto es, conservando el poder adquisitivo del dinero, existe un incremento en el monto a pagar (o cobrar)

El ejemplo clásico es el de las tasas en UF+X%

Esto significa que al cabo de un año el dinero debiera tener el mismo poder adquisitivo que el dinero que invertí

Tasa de interés nominal

Una tasa de interés nominal es aquella que denota un crecimiento en el monto de dinero, sin ajustar la moneda por inflación. Así la tasa de interés nominal no necesariamente significa un incremento en el poder adquisitivo.

El ejemplo típico son los depósitos en pesos a 30 días de los bancos o los créditos en pesos.

Tasa de interés real v/s nominal

En equilibrio el banco debiera ser indiferente entre prestar a tasas reales o nominales, siempre y cuando las tasas nominales incluyan las expectativas de inflación.

Así surge la igualdad de Fischer

$(1+i)=(1+r)(1+\pi)$

donde

i=tasa de interés nominal

r= tasas de interés real

π= inflación esperada

Tasa de interés real v/s nominal

Ejemplo: En qué banco me conviene depositar 100UM, ¿en el que ofrece 18% de interés anual o el que ofrece UF+5,5% anual?

Si ambas rindieran lo mismo

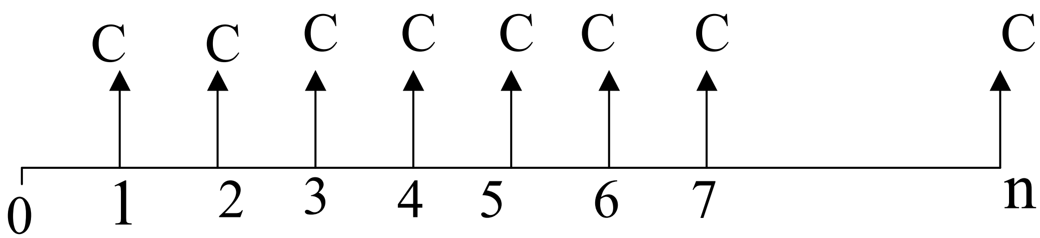
$100(1+i)=100(1+r)(1+\pi)$

$(1+\pi)=(1+i)/(1+r)=1{,}18/1{,}055)=1{,}1185$

Luego, si la inflación esperada es mayor que 11,85% anual, conviene la alternativa de UF +5,5% anual.

Ejercicio: Un empresario desea invertir $100 millones en alguna de las siguientes alternativas que le ofrecen los bancos y las financieras .
Banco A: 0,6% interés real mensual
Banco B: 12 % interés nominal anual
Banco C: 5% interés real semestral
Financiera D: 2% real trimestral
Financiera E: Le ofrece devolver $115 millones al cabo de un año.
a) ¿Qué alternativa le conviene?
b) ¿Qué tasas tendrían que ofrecer los bancos y las financieras para igualar la oferta más conveniente para el empresario
Suponga una expectativa de inflación del 3% anual

Ejercicio: (CUOTAS) Suponga que una cantidad C se deposita cada período (hasta n periodos) como lo indica el flujo siguiente, a tasa de interés r. Demuestre que el valor presente y el valor futuro



correspondiente a este plan de ahorro son respectivamente;

$$VP = \frac{C*((1+r)^n - 1)}{r*(1+r)^n}$$

$$\text{VF} = \frac{\text{C}}{\text{r}}*((1+r)^n - 1)$$

Factor de actualización de la serie y Factor de Recuperación de Capital

Al factor S se le llama Factor de Actualización de la serie (F.A.S), y a su valor inverso (1/FAS), Factor de Recuperación del Capital (F:R:C) con lo que se tiene que:
C= P.FRC

$$S = \left[\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n r} \right] \qquad FRC = \left[\frac{(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} \right]$$

Como es posible ver la expresión que sigue permite relacionar una cuota constante de n periodos con su valor actual y la tasa de interés. Conociendo tres de esos términos, siempre es posible conocer el que falta.

$$VP = C\left[\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n r} \right] \Leftrightarrow VP = \frac{C}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

Ejercicio

Usted requiere comprar un equipo usado cuyo precio es de $800000 y sólo cuenta con $500000 para pagar al contado

a)Si le prestan la diferencia al 10% anual y sus ingresos le permiten pagar cuotas de $94641 al año (al final de cada año) ¿ Cuánto demorará en pagar el equipo?

B) Si le prestan la diferencia al 10% anual a seis años plazo ¿ de qué monto serán las cuotas?

c)Si le prestan la diferencia y debe pagar cuotas de $118698 al año durante 5 años ¿ qué tasa de interés le están cobrando?

Ejercicio

A un empresario le ofrecen un préstamo de 1000UF para financiar parte de la inversión de un proyecto a una tasa de interés del 10% real anual pagadero en cuatro cuotas iguales anuales.

a) Determine el valor de la cuota anual, detallando cuánto debe pagar por concepto de amortización e intereses cada año.

b) Si un banco B le ofrece la alternativa de préstamo por la misma cantidad (1000UF) pero pagadero en cuatro cuotas iguales por concepto de amortización, e intereses del 10% real sobre el saldo de la deuda. Detalle cuánto debe pagar por concepto de amortización e intereses cada año.

Ejercicio **:** La multitienda “EMEGEPEPE.” ofrece las siguientes alternativas para la compra de un escritorio de oficina completamente equipado:

a) Pago contado de $ 500.000.
b) Pago en cuatro cuotas fijas mensuales de $ 150.000, comenzando a pagar dentro de 3 meses.
c) Pago en seis cuotas fijas mensuales de $110.000, comenzando a pagar dentro de 1 mes.

Considere que en (b) y (c) se está cobrando un interés de 1% mensual (real) y que la expectativa de inflación mensual es 0,5%.

a) ¿Cuál de las tres ofertas resulta más conveniente?.
b) Suponga que Ud. no tiene los $ 500.000, y desea pedirlos prestados para pagar al contado. Un banco le ofrece un préstamo por esa cantidad a un 13,5% de interés anual (nominal), a devolver en cuatro cuotas iguales a partir del mes tres. ¿Resulta dicho préstamo más atractivo que la alternativa (b)?. ¿ Cuál es el valor de la cuota?

VAN (Valor Actual Neto)

El valor actual neto (VAN) de una inversión es igual al valor presente de sus flujos de caja netos, menos el desembolso inicial de la inversión;

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{FC_t}{(1+i)^t}$$

Donde FCt = flujo de caja netos
i= tasa de descuento
n= Vida esperada del proyecto o inversión

El valor actual neto de un proyecto proporciona una medida del valor neto de una propuesta de inversión. Si el VAN es positivo se acepta el proyecto Si VAN es <0 se rechaza. La aceptación de un proyecto utilizando el criterio del VAN es coherente con el objetivo de maximizar la riqueza de los accionistas.