Apunte de Lógica
Lógica de las Normas

Bernardo Mundaca Aranda

2017

Una de las definiciones más usuales de *Lógica* es “el análisis de los métodos de razonamiento”. En el estudio de estos métodos, la lógica está más interesada en la forma que en el contenido de un argumento. Es decir, investiga la relación de consecuencia que se da entre premisas y la conclusión de un argumento correcto. Se dice que un argumento es correcto (válido) si su conclusión se sigue de (o es consecuencia de) sus premisas; de otro modo es incorrecto.

1. Lógica Proposicional

1.1. Enunciados o Proposiciones

Los enunciados o proposiciones se denotarán, por lo general, con las letras p, q, r.

El carácter fundamental de un enunciado es que, o bien es *verdadero* (V), o bien es *falso* (F), pero no ambos. La verdad o falsedad de un enunciado se llama *valor de verdad*. Algunos enunciados son compuestos, es decir, están formados de enunciados simples y de varios conectivos que estudiaremos después.

En otras palabras, podemos decir que “una proposición debe interpretarse como un enunciado que siempre toma uno de los valores de verdad posibles: verdadero (V) o falso (F)”.

1.1.1. Ejemplos

1. “Las rosas son rojas” es un enunciado simple, susceptible de ser calificado como verdadero o falso.
2. “Las rosas son rojas y las violetas, azules” es un enunciado compuesto de las proposiciones simples “las rosas son rojas” y “las violetas son azules”. Un enunciado compuesto también recibe el nombre de *argumento*.
3. “¿Dónde vas?” no es una proposición, pues no es ni verdadera ni falsa.

Una propiedad fundamental de los enunciados compuestso es que su valor de verdad está determinado por completo por el valor de verdad de cada una de sus proposiciones simples **y por el modo en que se las reúne** para formar el enunciado compuesto. Estos “modos de reunir” serán estudiados a continuación.

1.2. Negación

Dado un enunciado “p”, se puede formar otro enunciado, llamado *negación de p* (leyéndose “no p”). Simbólicamente, la negación se denota por:

$$\sim p;\ \neg p;\ \overline{p}$$

El valor de verdad de la negación de un enunciado depende de la siguiente condición:

Si p es verdadero, entonces $\sim p$ es falso; si p es falso, entonces $\sim p$ es verdadero. Es decir, **el valor de verdad de la negación de un enunciado siempre es el opuesto del valor de verdad del enunciado**.

La manera más conveniente de expresar lo enunciado es por medio de una tabla que nos coloca en todos los casos:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Nota: La negación de la negación de un enunciado nos regresa al enunciado original. Es decir:

$$(\neg(\neg p)) = p$$

1.3. Conjunción

Dos enunciados cualesquiera se pueden combinar por medio de la palabra "y" para formar un enunciado compuesto, denominado **conjunción** de los enunciados. Simbólicamente, la conjunción de los enunciados p y q se denota:

$$p \wedge q$$

1.3.1. Ejemplo

Sea p: "está lloviendo" y q: "el sol brilla". Entonces, $p \wedge q$ denota el enunciado "está lloviendo **y** el sol brilla".

El valor de verdad del enunciado compuesto $p \wedge q$ satisface las condiciones siguientes:

Si p es verdadero y q es verdadero, entonces $p \wedge q$ es verdadero. **En cualquier otro caso, el enunciado compuesto es falso**. Es decir, la conjunción de dos enunciados **es verdadera solamente si cada una de las proposiciones es verdadera de manera independiente**.

Se puede determinar la tabla del siguiente modo:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.4. Disyunción

Dos enunciados cualesquiera se pueden combinar por medio de la palabra "o" (tomándose como "y/o") para formar un nuevo enunciado que se llama **disyunción** de los dos enunciados previos. Simbólicamente, la disyunción de p y q se denota por:

$$p \vee q$$

1.4.1. Ejemplo

Sea p: "él estudió francés en la universidad", y sea q: "él vivió en Francia". Entonces, $p \vee q$ es el enunciado: "él estudió fránces o (y/o) vivió en Francia".

El valor de verdad del enunciado compuesto $p \vee q$ cumple la condición siguiente:

Si p es verdadero, o q es verdadero, o si ambos, p y q, son verdaderos, entonces $p \vee q$ es verdadero. **En cualquier otro caso** $p \vee q$ **es falso**. Es decir, la disyunción de dos enunciados **es falsa cuando ambos componentes son falsos**.

La tabla, por tanto, quedará como sigue:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.5. Condicional

Una gran cantidad de enunciados, especialmente en la matemática, son de la forma "si p, entonces q". Todas las demostraciones matemáticas emplean proposiciones condicionales de este tipo. Tales enunciados se llaman **condicionales** y se les denota por:

$$p \longrightarrow q$$

La cláusula “si”, llamada *hipótesis, premisa o dato*, es un conjunto de una o más proposiciones, las cuales formarán la base para una conclusión. La cláusula *entonces* que se deduce necesariamente de las premisas se llama *conclusión*.

El valor de verdad el enunciado condicional $p \longrightarrow q$ resulta de la siguiente condición:

El condicional $p \longrightarrow q$ es verdadero **a menos que** p **sea verdadera y** q **sea falsa**. Es decir, **no se puede implicar algo falso a partir de un enunciado verdadero**.

La tabla quedaría del siguiente modo:

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.6. Bicondicional

Otro enunciado corriente es el de la forma “p si, y solamente si (ssi) q”. Tales enunciados reciben el nombre de **bicondicionales** y se les denota por la expresión:

$$p \longleftrightarrow q$$

El valor de verdad de los enunciados bicondicionales $p \longleftrightarrow q$ obedece a la condición:

Si p y q **tienen el mismo valor de verdad, entonces la bicondicionalidad es verdadera; si** p **y** q **tienen distinto valor de verdad, entonces** $p \longleftrightarrow q$ **es falso**.

La tabla de bicondicional quedaría, entonces, del siguiente modo:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.7. Tablas de verdad

Una forma simple de mostrar la relación entre el valor de verdad de un argumento y los valores de verdad de las proposiciones que lo componen es construyendo una **tabla de verdad**. En la elaboración de ésta, seguiremos algunos pasos que nos permitirán mantener el orden y evitar confusiones, Por ejemplo, en las columnas de la izquierda irán las proposiciones y todas sus posibilidades, a continuación las negaciones y, luego, las operaciones entre éstas y/o sus negaciones.

1.7.1. Ejemplo

Construiremos la tabla de verdad de la proposición $\neg(p \wedge \neg q$.

De acuerdo a lo que dijimos anteriormente, la tabla quedaría así:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Intente construir la tabla de las siguientes proposiciones:

1. $\neg p \longrightarrow \neg q$
2. $\neg p \vee (q \wedge r)$

1.8. Tautología y Contradicción

Algunas proposiciones tienen sólo V en la última columna de su tabla de verdad. Es decir, la proposición será siempre un enunciado verdadero, sean cuales fueren los valores de verdad de los enunciados que la componen. Estas proposiciones se denominan **tautologías**.

Definición: Una proposición $P(p, q, r, \ldots)$ es una **tautología** si es **verdadera** para cualquier enunciado p, q, $r \ldots$ que la componga.

De un modo análogo,

Definición: Una proposición $P(p, q, r, \ldots)$ es una **contradicción** si es **falsa** para cualquier enunciado p, q, $r \ldots$ que la componga.

1.8.1. Ejercicios

1. $p \vee \neg p$
2. $p \vee \neg q$
3. Pruebe que el *Principio Fundamental del Razonamiento Lógico*, denominado también *Ley del Silogismo*, y enunciado como "si p implica q, y q implica r, entonces p implica r, es una tautología.

1.9. Equivalencia lógica

Dos proposiciones $P(p, q, r, \ldots)$ y $Q(p, q, r, \ldots)$ se dicen **lógicamente equivalentes** si **sus tablas de verdad son idénticas**. Se denota la equivalencia lógica de P y Q por:

$P(p, q, r, \ldots) \equiv Q(p, q, r, \ldots)$, o también como $P(p, q, r, \ldots) \Longleftrightarrow Q(p, q, r, \ldots)$

1.9.1. Ejercicio

1. Desarrollando las tablas de verdad de $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ y de $p \longleftrightarrow q$, pruebe que ambas propsiciones son lógicamente equivalentes.
2. Verifique que si $P : p \longrightarrow q$ y $Q : \neg p \vee q$, entonces $P \Longleftrightarrow Q$.

1.10. Propiedades de lógica proposicional

Las siguientes son propiedades (o tautologías) importantes que deberán ser demostradas mediante Tablas de Verdad, es muy importante que el alumno se esfuerce por hallar el sentido lógico en lo que está demostrando.

Recuerde que el símbolo "$\Longleftrightarrow$" significa que las proposiciones son equivalentes entre sí.

1. $(p \wedge \neg p) \Longleftrightarrow F$ $\quad (p \wedge V) \Longleftrightarrow p$ $\quad (p \wedge F) \Longleftrightarrow F$

   $(p \vee \neg p) \Longleftrightarrow V$ $\quad (p \vee V) \Longleftrightarrow V$ $\quad (p \vee F) \Longleftrightarrow p$

2. $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$

3. *Leyes de De Morgan*

   a) $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

   b) $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

4. *Conmutatividad*

   a) $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$

   b) $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$

5. *Asociatividad*

   a) $((p \vee q) \vee r) \Longleftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

   b) $((p \wedge q) \wedge r) \Longleftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

6. *Distribuitividad*

   a) $(p \vee (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

b) $(p \wedge (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

7. *Equivalencia dividida en dos partes*

   $(p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p))$

8. *Transitividad*

   $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Longleftrightarrow (p \longrightarrow r)$

9. *Contrarrecíproca*

   $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$

10. *Reducción al absurdo*

    $\neg(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$

2. Lógica del cambio

A diferencia de la lógica proposicional, la lógica del cambio trabaja con un operador mucho más sencillo al que llamaremos T. Éste se caracteriza por dar cuenta de la mantención o alteración de un estado de cosas en el mundo.

Así, por ejemplo, siendo p una ventana abierta, puede:

Mantenerse abierta: pTp
O cerrarse: $pT\neg p$

De la misma manera, siendo $\neg p$ una ventana cerrada, puede:

Mantenerse cerrada: $\neg pT\neg p$
O abrirse: $\neg pTp$

Es importante dar cuenta del hecho de que en este tipo de lógica, a diferencia del que analizaremos a continuación, no se está involucrando la acción humana. Es la mera descripción de un estado de cosas.

3. Lógica de la acción

En este tipo de lógica, es posible reconocer la acción humana como interventora del estado de cosas descrita en la lógica del cambio. Así, trabajando con los operadores d y f que representarán acción (en un sentido positivo) y abstención, respectivamente.

Así, un enunciado sencillo puede ser

$$d\neg pTp$$

; es decir, "hacer que la ventana se abra".

O, también,

$$d\neg pT\neg p$$

quiere decir: "actuar para que la ventana se mantenga cerrada".

O, por otro lado,

$$fpTp$$

quiere decir: "abstenerse de dejar la ventana abierta".

4. Lógica deóntica

Este tipo de lógica se relaciona con los enunciados deónticos. Es decir, aquéllos en los cuales intervienen deberes, permisos o prohibiciones. Para ello utilizaremos los operadores O (obligación), P, (permiso) y Ph (prohibición), respectivamente. Sin embargo, es menester recordar que en lógica no podemos desenvolvernos con cualquier tipo de oración, sino sólo con proposiciones o enunciados lógicos. Es por ello que primero toca diferenciar entre norma y proposición normativa.

4.1. Normas y proposiciones normativas

Toda proposición posee, por definición, un valor de verdad. Sin embargo, esta característica no es compartida por las normas. No podemos decir si la norma que dice "los contratos obligan" o "las promesas se cumplen" tienen valor de verdad o no. Sin embargo, sí puede afirmarse que "el artículo 1545 del Código Civil establece que los contratos obligan" o "hay una principio moral que establece que las promesas se cumplen".

Es por esta misma razón que, al trabajar con lógica deóntica estaremos refiriéndonos a enunciados normativos y no a normas. Así, por ejemplo, al decir "No se puede fumar", nos estaríamos refiriendo a la descripción del hecho de que existe una norma que prohibe fumar y no a la norma en sí.

4.2. Mandatos, prohibiciones y permisos

Continuando con nuestro ejemplo de la ventana, la obligación de abrir la ventana se expresaría

$$Od\neg pTp$$

Ahora, en lógica deóntica hay una mayor atención en los operadores deónticos que en los del cambio y de la acción. Por la misma razón, y para evitar complejidades, reduciremos toda la expresión de acción, vale decir $d\neg pTp$ será, simplemente, p. Así, podemos decir que p es mantener la ventana abierta y simplificamos la expresión de obligar a abrir la ventana denotandóla como

$$Op$$

.

4.2.1. Propiedades

Existen muchas características propias de la lógica deóntica. Sin embargo, sólo mencionaremos algunas básicas.

1. Si algo está prohibido, entonces no está permitido: $Php \longrightarrow \neg Pp$
2. Pero sí está permitido no hacerlo: $Php \longrightarrow P\neg p$
3. Si algo es obligatorio, entonces está permitido: $Op \longrightarrow Pp$
4. Sin embargo, si algo está permitido, no podemos afirmar que es obligatorio.
5. Podemos agregar el operador F que quiere decir, facultado. $F = Pp \wedge P\neg p$
6. Todo puede establecerse en términos de permisos, obligaciones o prohibiciones. Así, por ejemplo
    - $Op = \neg P\neg p$
    - $Pp = Pp$
    - $Php = \neg Pp$
7. Prohibición y obligación son interdefinibles. $Op = Ph\neg p$ y $Php = O\neg p$
8. Op y Php no pueden ser verdaderas al mismo tiempo, pero sí ambas falsas.
9. Pp y $P\neg p$ pueden ser ambas verdaderas, pero no ambas falsas.
10. Op y $P\neg p$ no pueden ser ni verdaderas ni falsas a la vez.
11. Php y Pp no pueden ser ni verdaderas ni falsas a la vez.