III. Elección en condiciones de incertidumbre

Hasta el momento hemos analizado como los agentes económicos toman sus decisiones de consumo o producción en condiciones de certeza total.

Es decir, cuando un consumidor adquiere un bien sabe exactamente cuáles son las propiedades de ese bien y cuanta satisfacción le va a reportar.

Y cuando un productor decide acerca de sus niveles de producción, las variables que influyen en su decisión (por ejemplo, el precio de venta del bien, sus costos, etc.) son perfectamente conocidas por él.

Sin embargo, muchas veces los agentes económicos deben tomar decisiones en condiciones de incertidumbre.

EJEMPLO: Un consumidor que desea comprar un automóvil de segunda mano. Tal vez no tiene certeza total acerca del estado real del automóvil.

EJEMPLO: Un productor agrícola quien no tiene certeza acerca de que el clima estará bueno o malo cuando realice su producción.

EJEMPLO: Un inversionista que no sabe cuál será el resultado futuro de sus inversiones.

En estas situaciones decimos que los agentes económicos deben tomar *decisiones en condiciones de incertidumbre*.

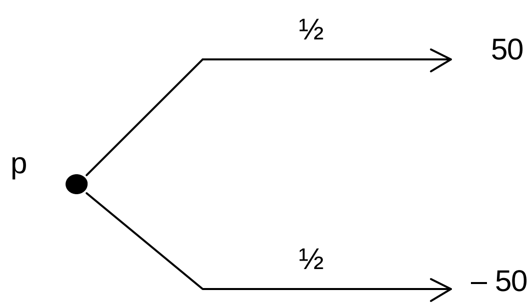
Sin embargo, la falta de información de los agentes no es total. Si bien el resultado es incierto, se tiene una idea acerca de los posibles *resultados* y de sus *probabilidades* de ocurrencia.

A estas situaciones inciertas donde se tiene un conjunto de posibles resultados junto a sus respectivas probabilidades se les conoce como *loterías*.

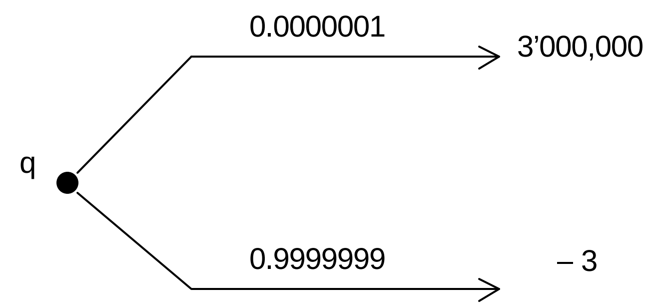
III.1 Concepto de Lotería

Una "*lotería*" o "*apuesta*" es una situación incierta donde tenemos un conjunto de resultados y probabilidades asociadas a dichos resultados.

EJEMPLO: Se lanza una moneda. Si sale cara gano $50. Si sale sello pierdo $50. La probabilidad de ocurrencia de cada resultado es ½

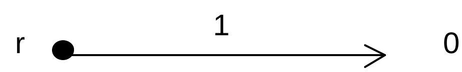


EJEMPLO: Comprar un boleto para un sorteo (por ejemplo, la Tinka). Si gana, recibe S/. 3'000,000 con probabilidad 0.0000001 y si pierde, solamente pierde el valor de la jugada (3 soles) con probabilidad 0.9999999.

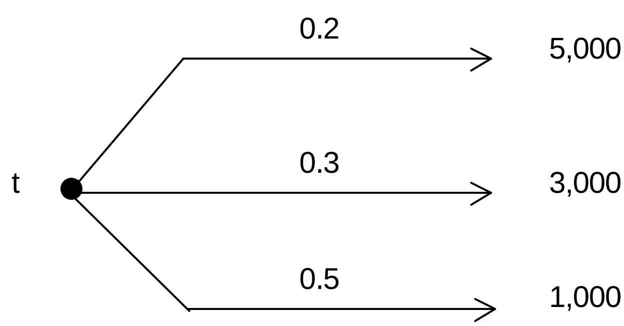


En estos ejemplos las loterías tienen dos resultados, sin embargo podrían existir más de dos resultados o simplemente uno.

EJEMPLO: Si decide no comprar el boleto de la Tinka, con probabilidad 1 ni gana ni pierde sino que conserva su riqueza inicial.



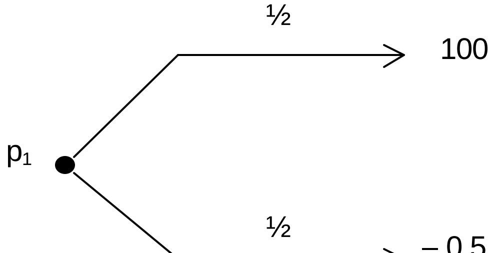
EJEMPLO: Un agricultor decide invertir en su cosecha. Con probabilidad 0.2 obtendrá una cosecha "buena" (valorizada en 5,000), con probabilidad 0.3 una cosecha "normal" (3,000) y con probabilidad 0.5 una cosecha "mala" (1,000).

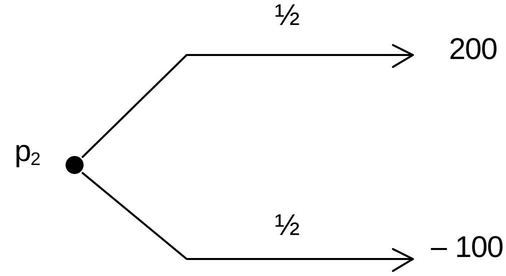


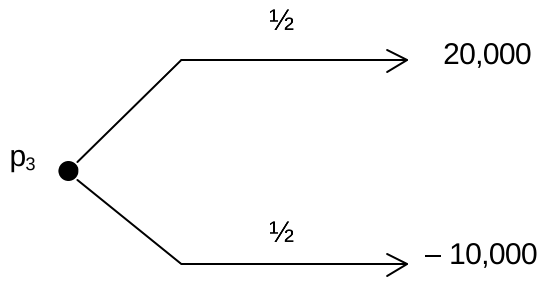
En la terminología de las loterías, a los resultados se les llama **"***premios***"**. Estos premios no necesariamente están medidos en términos monetarios, no obstante es usual trabajar con loterías monetarias.

III.2 Elección de loterías óptimas

Todas las loterías no son iguales para las personas, algunas son más preferidas a otras. Por ejemplo, supongamos que tenemos S/. 10,000 y tenemos la opción de jugar una de las siguientes loterías.







La riqueza final después de jugar las loterías es igual a 10,000 más los premios de cada lotería.

Dado que tenemos la opción de jugar por alguna de las loterías (suponga que sólo puede jugar una), ¿cuál sería la elección óptima del apostador? Necesitamos un criterio para escoger entre las loterías.

El valor esperado:

Una forma de evaluar las loterías es a través del *valor esperado* de los premios. Un valor esperado es un promedio ponderado de los resultados, utilizando como ponderaciones a las probabilidades.

El criterio consiste en escoger la lotería que tenga un mayor valor esperado. En el ejemplo:

$$VE(p_1) = \left(\frac{1}{2}\right)*10{,}100 + \left(\frac{1}{2}\right)*9999.5 = 10{,}049.75$$

$$VE(p_2) = \left(\frac{1}{2}\right)*10{,}200 + \left(\frac{1}{2}\right)*9{,}900 = 10{,}050$$

$$VE(p_3) = \left(\frac{1}{2}\right)*30{,}000 + \left(\frac{1}{2}\right)*0 = 15{,}000$$

Entonces según el criterio, la lotería p_3 es la mejor de todas pues tiene un mayor valor esperado.

Sin embargo, este criterio puede resultar no tan bueno. Nótese que la lotería p_3 ofrece un resultado de 30,000 si gana y cero si pierde. En la realidad muy pocas personas estarían dispuestas a jugar esta lotería pues es muy riesgosa. Lo más probable es que se juegue la lotería p1 que es menos "riesgosa" que la lotería p_3.[1]

En el caso de p_1, se gana poco pero la pérdida es insignificante. En cambio con la lotería p_3 se puede ganar mucho pero también se puede perder mucho. Por ello, para la mayoría de las personas la lotería p_1 es la mejor elección. Sin embargo, nada descarta que alguien elija la lotería p_3.

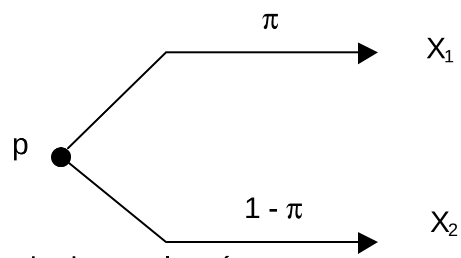
[1] Una forma de medir el riesgo es con la varianza de la lotería. La formula de cálculo de la varianza es: $\text{varianza} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$ donde $\bar{x}$ es el valor esperado y p_i son las probabilidades.

La utilidad esperada:

Según este criterio, los individuos no eligen las loterías según el valor esperado de los premios sino según la *utilidad esperada* de las loterías.

Dada una función de utilidad u(.), se define la Utilidad Esperada como el promedio ponderado de las utilidades de los premios, utilizando como ponderaciones a las probabilidades.

Por ejemplo, si tenemos una lotería



La utilidad esperada de esta lotería es

$$UE(p) = \pi * u(X_1) + (1 - \pi) * u(X_2)$$

En el ejemplo, supongamos que $u(x) = \sqrt{x}$ entonces

$$UE(p_1) = \left(\frac{1}{2}\right) * \sqrt{10,100} + \left(\frac{1}{2}\right) * \sqrt{9999.5} = 100.248$$

$$UE(p_2) = \left(\frac{1}{2}\right) * \sqrt{10,200} + \left(\frac{1}{2}\right) * \sqrt{9,900} = 100.247$$

$$UE(p_3) = \left(\frac{1}{2}\right) * \sqrt{30,000} + \left(\frac{1}{2}\right) * \sqrt{0} = 86.603$$

Entonces la lotería p_1 es la escogida porque reporta una mayor utilidad esperada.

III.3 La aversión al riesgo

En el ejemplo anterior vimos tres loterías donde algunas podían ser catalogadas como más "riesgosas" que otras pues tienen pérdidas grandes y una gran variabilidad en sus premios.

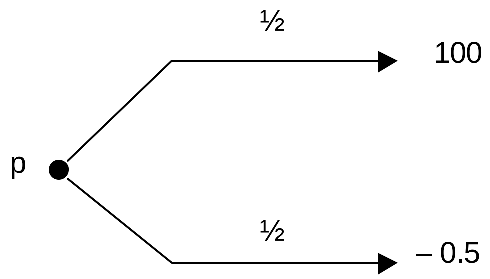
Cuando definimos la función de utilidad del tipo $u(x) = \sqrt{x}$ encontramos que las loterías preferidas eran las que tenían menores pérdidas.

En cambio es fácil probar que si hubiéramos definido a la función de utilidad como $u(x) = x^2$ la mejor lotería –según el criterio de la máxima utilidad esperada– sería la lotería p_3.

Entonces la elección de la lotería óptima depende de la función de utilidad del individuo, es decir de la *actitud hacia el riesgo* de las personas.

Se reconocen tres tipos de actitudes hacia el riesgo. Un individuo puede ser averso al riesgo, puede ser amante o buscador de riesgo o puede ser neutral al riesgo. El siguiente ejemplo nos permitirá entender estos tres casos.

EJEMPLO: Suponga que Ud. decide jugar la lotería



VE(p) = 49.75

donde 0.5 puede entenderse como el valor del boleto de un sorteo, por ejemplo.

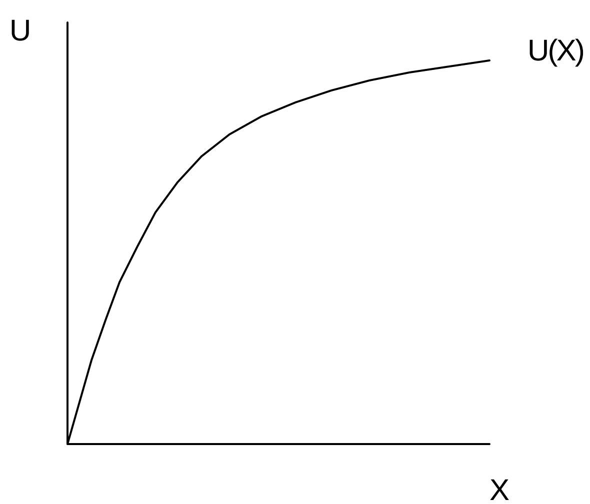
Imagine que Ud. ya compró el boleto del sorteo y de pronto un amigo suyo le ofrece comprarles el boleto pagándoles S/. 49.75 soles en efectivo. ¿Aceptaría usted el trato?

Si acepta cambiar el boleto por el dinero con seguridad, entonces es un individuo *renuente al riesgo*, en el sentido que prefiere la seguridad antes que el riesgo.

Por el contrario, si rechaza la propuesta de 49.75 soles y prefiere jugar la lotería, entonces se trata de un individuo *amante o buscador de riesgo* (prefiere correr el riesgo antes que la seguridad).

En cambio, si la persona es indiferente entre la propuesta del amigo y su lotería, se dice que es *neutral al riesgo*.

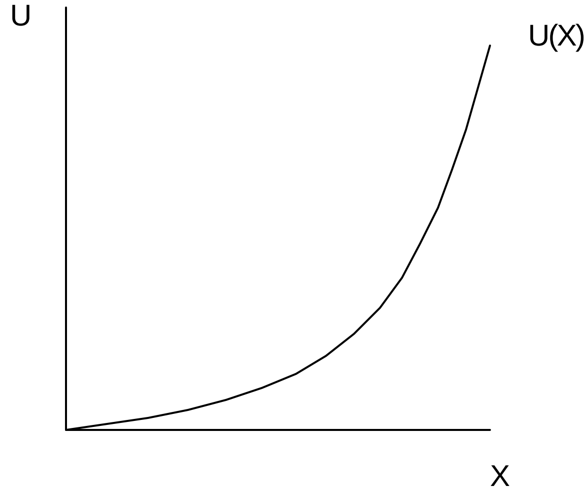
Típicamente los individuos aversos al riesgo tiene funciones de utilidad cóncavas



Función de utilidad de un individuo averso al riesgo

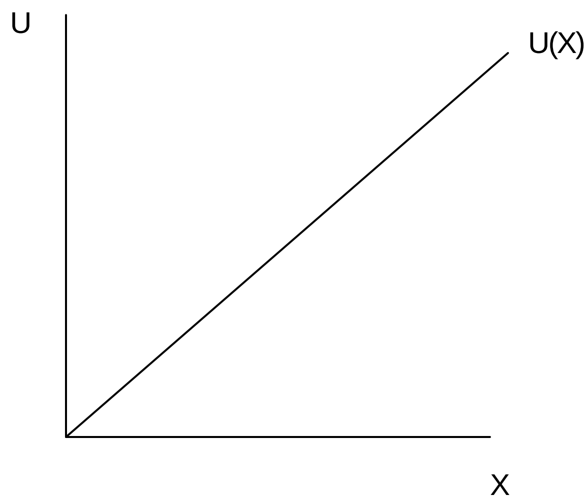
Algunos ejemplos de estas funciones: $u(x) = \sqrt{x}$, $u(x) = \ln(x)$.

Los individuos amantes del riesgo tienen funciones de utilidad convexas.



Función de utilidad de un individuo amante del riesgo

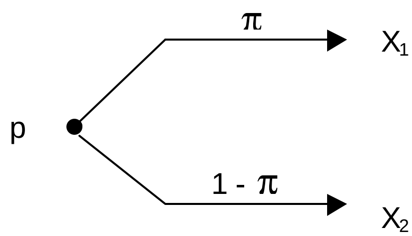
Finalmente un individuo neutral al riesgo tiene funciones de utilidad rectas.



Función de utilidad de un individuo neutral al riesgo

III.4 Gráfico de la utilidad esperada

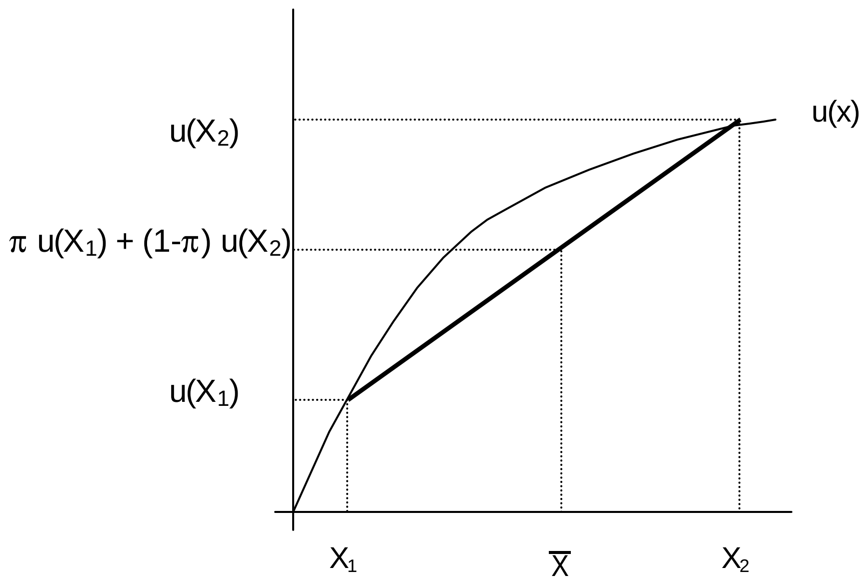
La utilidad esperada puede graficarse cuando las loterías tienen dos resultados posibles. Por ejemplo, la lotería



la cual tiene utilidad esperada:

$$UE(p) \quad = \quad p * u(X_1) \quad + \quad (1-p) * u(X_2)$$

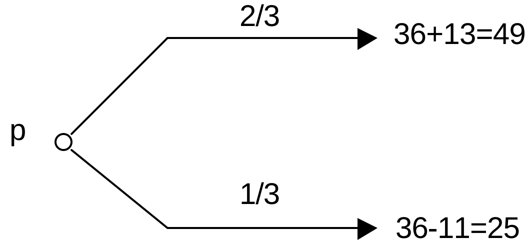
se representa como una cuerda en el siguiente gráfico

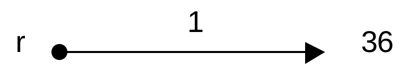


****

EJERCICIO: Un individuo posee una riqueza de 36 y está considerando invertir en un nuevo negocio el cual, con probabilidad 2/3 incrementará su riqueza en 13 mientras que con probabilidad 1/3 la reducirá en 11. Suponiendo que el individuo es averso al riesgo con función de utilidad $u(x) = \sqrt{x}$ ¿Qué decisión tomará el inversionista?

Respuesta: Debe evaluar la utilidad esperada de las loterías que está enfrentando





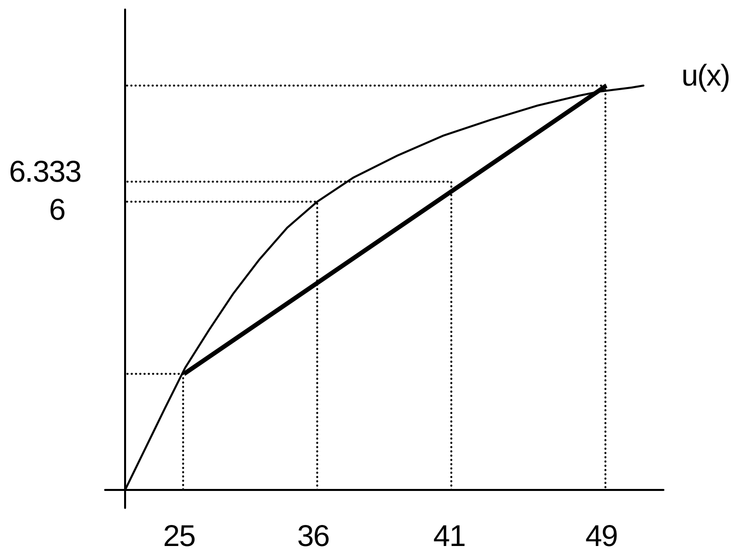
calculando las utilidades esperadas

$$UE(p) = \left(\frac{2}{3}\right) * \sqrt{49} + \left(\frac{1}{3}\right) * \sqrt{25} \cong 6.33$$

$$UE(r) = 1 * \sqrt{36} = 6$$

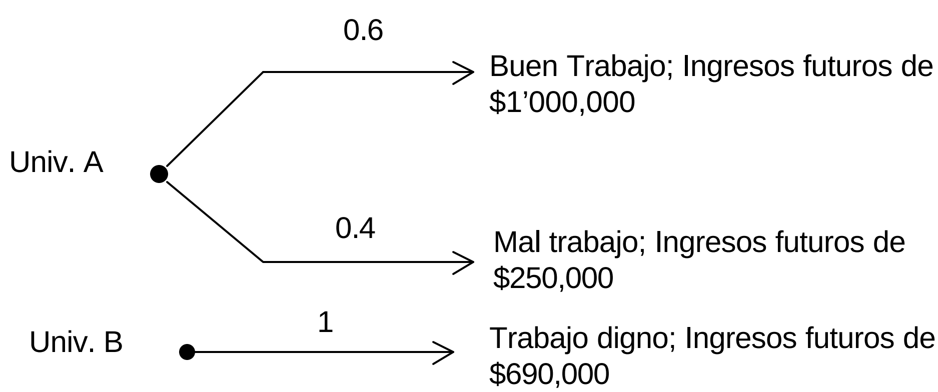
Por lo tanto el inversionista decide invertir.

Gráficamente



****

EJERCICIO: *(Frank, cáp. 6)* Elección entre universidades. Un estudiante debe escoger entre dos universidades, A y B. Sus perspectivas laborales se resumen en el siguiente cuadro:



Suponiendo que el estudiante es averso al riesgo con función de utilidad u(x) = ln(x), las utilidades esperadas en cada caso son:

$$UE(A) = 0.6 * \ln(1'000,000) + 0.4 * \ln(250,000) \cong 13.2616$$

$$UE(B) = 1 * \ln(690{,}000) \cong 13.44$$

Entonces elige la universidad B.

III.5 Ejemplos y aplicaciones

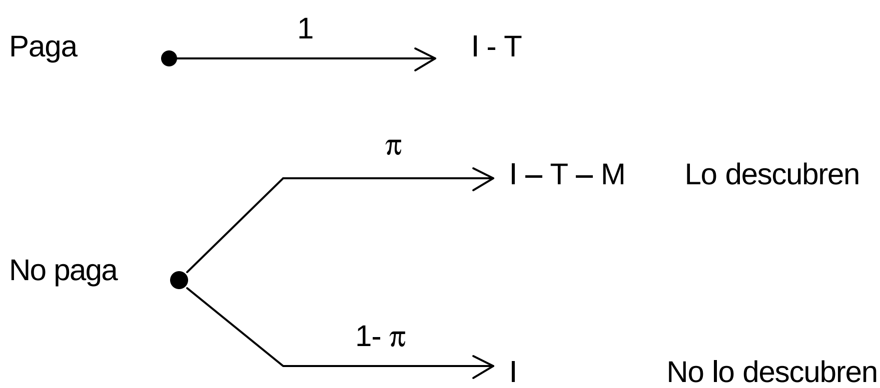
Veremos algunos ejemplos y aplicaciones de la teoría de la utilidad esperada

(a) Evasión de impuestos

Un individuo posee un ingreso bruto “I”, y debe decidir si paga o no pagar sus impuestos “T”. Si paga, obtiene con seguridad un ingreso “I-T”. Si decide no pagar con probabilidad de π puede ser descubierto debiendo entonces pagar una multa “M”. Si no paga, se queda con su ingreso “I”. ¿Qué decisión tomará el individuo si es averso al riesgo?

Este problema se puede representar por medio de loterías.

Sean: I = Ingreso
T = Impuesto
M = Multa



Sea:

$I^s = I - T$ Ingreso con seguridad

$I^e = p * (I - T - M) + (1 - p) * I$ Ingreso Esperado

La decisión de la persona depende no de sus ingresos esperados sino de su utilidad esperada.

$$UE(p) = 1 * u(I - T)$$

$$UE(np) = p * u(I - T - M) + (1 - p) * u(I)$$

Dando valores: I = 100, T = 20, M = 16, π = 0.2, $u(x) = \sqrt{x}$

$UE(p) = 1 * \sqrt{80} \cong 8.9$

$$UE(np) = 0.2 * \sqrt{64} \; + \; 0.8 * \sqrt{100} \cong 9.6$$

Entonces el individuo decide no pagar sus impuestos.

Gráficamente

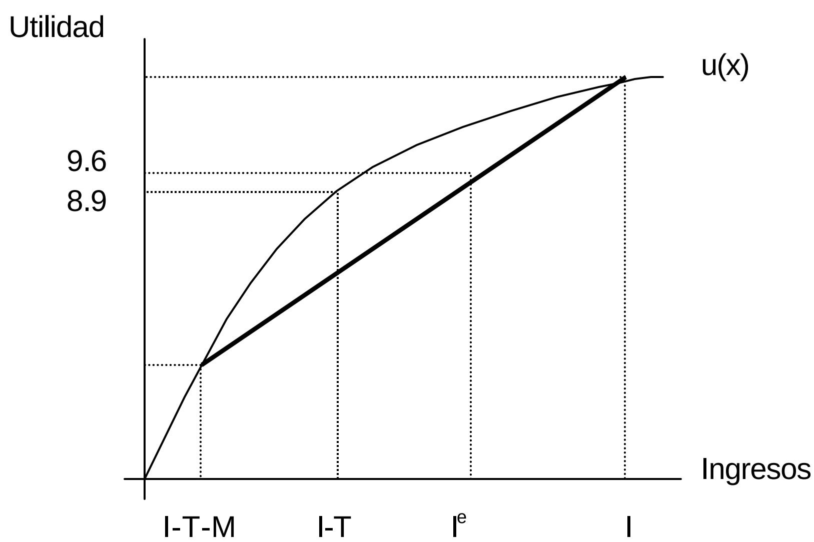


Gráfico de la utilidad esperada de las dos loterías

¿Qué se puede hacer para evitar la evasión?

- Elevar las multas
- Mejorar la vigilancia (aumentar la probabilidad de descubrir la evasión)

¿Cuánto debería ser la multa M como mínimo para que no evada?

Si elevamos la multa entonces UE(np) disminuye. Bastará con que disminuya a un nivel un poco menor que UE(p).

Matemáticamente la multa mínima M es la que resuelve la ecuación:

$$UE(p) \; = \; UE(np) \; = \; p * u(I - T - M) \; + \; (1 - p) * u(I)$$

$$8.9 \; = \; 0.2 * u(80 - M) \; + \; 0.8 * u(100)$$

$$8.9 \; = \; 0.2 * \sqrt{80 - M} \; + \; 0.8 * \sqrt{100}$$

Resolviendo tenemos M = 59.75

Es decir, la multa debería incrementarse por lo menos hasta 59.75 unidades (más unos centavos) para que el individuo se vea incentivado a pagar sus impuestos.

(b) Diversificación de cartera

Veamos una tercera aplicación de la teoría de la utilidad esperada: la diversificación de inversiones entre un conjunto de activos de distinto riesgo y rentabilidad.

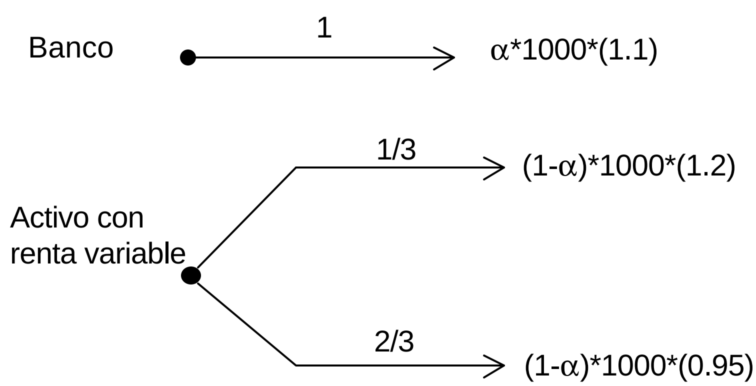
Sea W=1000 la riqueza de un individuo la cual desea diversificar en dos activos:

- Depositar una fracción α en un banco (activo seguro) el cual paga una tasa de interés del 10%

- Invertir la fracción restante $(1-\alpha)$ en un activo riesgoso donde con probabilidad 1/3 puede ganar 20% de lo invertido, y con probabilidad 2/3 puede perder 5% de lo invertido.

Supongamos que el individuo es averso al riesgo con función de utilidad u(x) = ln(x).

En términos de loterías



La utilidad total del individuo es la suma de las utilidades esperadas en cada caso.

Utilidad Total = UE_{banco} + UE_{activo}

$$\mathrm{U}(a) = \mathrm{u}(a * 1100) + \left[\frac{1}{3}\cdot \mathrm{u}((1-a) * 1200) + \frac{2}{3}\cdot \mathrm{u}((1-a) * 950)\right]$$

El problema consiste en encontrar la fracción α que es invertida en el Banco tal que maximice la utilidad esperada del individuo.

Esto se consigue derivando $U(\alpha)$ con respecto a α. En este ejemplo utilizando la función de utilidad u(x) = ln(x), el α óptimo es $\alpha=0.5$.