



Capítulo XIII

Ecuaciones Exponenciales e Irracionales

13.1 Ecuaciones Exponenciales

En este tipo de ecuaciones la incógnita se encuentra formando parte del **EXPONENTE DE UNA POTENCIA**.

Su método de resolución se basa en que si

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

por ello para resolver las ecuaciones exponenciales se debe **igualar las bases**, aplicando las propiedades correspondientes, si ello no es posible la solución se busca por logaritmos.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} 2^{2x+14} &= 4^{3x+5} \\ 2^{2x+14} &= (2^2)^{3x+5} \\ 2^{2x+14} &= 2^{2(3x+5)} \\ 2^{2x+14} &= 2^{6x+10} \Rightarrow 2x+14 = 6x+10 \\ -4x &= -4 \\ x &= \frac{-4}{-4} \\ \boxed{x=1} \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} \left(6\frac{1}{4}\right)^{2x-1} : (2,5)^{3x+5} &= (0,4)^{x+3}, \text{ se convierten las bases en} \\ \text{fracciones para hacerlas más "manejables"} \\ \left(\frac{25}{4}\right)^{2x-1} : \left(\frac{5}{2}\right)^{3x+5} &= \left(\frac{2}{5}\right)^{x+3}, \text{ se igualan las bases} \\ \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{2x-1} : \left(\frac{5}{2}\right)^{3x+5} &= \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right)^{x+3} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2(2x-1)} : \left(\frac{5}{2}\right)^{3x+5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1(x+3)}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{4x-2} : \left(\frac{5}{2}\right)^{3x+5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x-3}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{4x-2-(3x+5)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x-3}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{4x-2-3x-5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x-3}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x-3} \Rightarrow x-7 = -x-3$$

$$\begin{aligned} 2x &= 4 \\ x &= \frac{4}{2} \\ \boxed{x=2} \end{aligned}$$

13.2 Ecuaciones Irracionales

Conceptos previos.

Para entender las ecuaciones irracionales, es necesario recordar ciertos elementos.

• Ecuaciones cuadráticas

Se trataron en extenso en el capítulo correspondiente, pero al menos es bueno considerar por ahora ciertos conceptos básicos.

Las ecuaciones cuadráticas son aquellas en las que se tiene una sola incógnita, pero esta está al cuadrado, puede existir también un término con la incógnita "sin exponente" (elevada a 1). Debido a que existen incógnitas al cuadrado, o puede la expresión completa al cuadrado, generalmente existen DOS soluciones que satisfacen la ecuación¹.

¹ Estas dos soluciones se generan por que, al elevar un número a 2 el resultado siempre es positivo [ej: 1^2 y $(-1)^2$], por lo que la ecuación $x^2 - 1 = 0$ tiene 2 respuestas 1 y -1]



Para resolverlas, por ahora, aprende la siguiente fórmula:

Forma general de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

RECUERDA QUE GENERALMENTE TIENEN DOS SOLUCIONES

Ejemplos:

$$\text{➤ } 5x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \frac{-2 + \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = -1 + \sqrt{6} \text{ y}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = -1 - \sqrt{6}$$

$$\text{➤ } -9x^2 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \frac{0 + \sqrt{(0)^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (4)}}{2 \cdot (-9)} = -\frac{2}{3} \text{ y}$$

$$x_2 = \frac{0 - \sqrt{(0)^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (4)}}{2 \cdot (-9)} = \frac{2}{3}$$

Dentro de la resolución de este capítulo deberás resolver algunas ecuaciones cuadráticas, puedes hacerlo utilizando esta fórmula o analizar las alternativas y aplicar la materia.

• “Raíz cuadrada”

Importante, recuerda, raíces PARES!!!

Junto con esto, los elementos DENTRO DE UNA RAÍZ par deben ser SIEMPRE POSITIVOS.

• Función valor absoluto

Dentro de tanta “complicación” por los signos, definiremos una función que ayudará a trabajar estas raíces. Para hacerlo en palabras sencillas, la “función valor absoluto” es simplemente EL “NÚMERO”, SIN CONSIDERAR EL SIGNO.

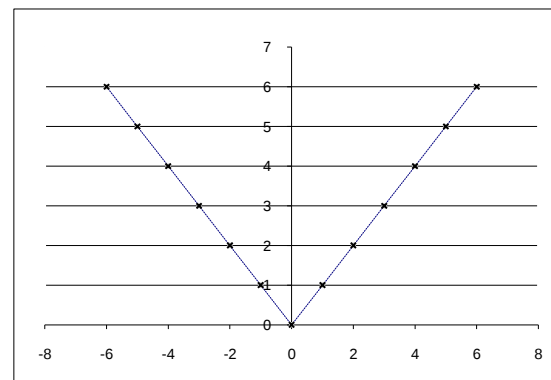
Se anota de esta forma: $f(x) = |x|$.

Ejemplos:

$$f(1) = |1| = 1 \quad \text{etc...}$$

$$f(-1) = |-1| = 1$$

El gráfico de esta función es así:



Esta función le daremos solo una utilidad práctica, cuando se tengan funciones potencia y raíz PARES, de manera tal que SE ANULEN LOS EXPONENTES, el resultado, será la función valor absoluto. En otras palabras:

$$\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$$

Al resolver cualquier operación con raíces pares, consideraremos el resultado de esta función como el resultado final.

Ejemplos:

$$\sqrt{(5)^2} = |5| = 5 \quad \left(\sqrt[4]{(1,3)}\right)^4 = |1,3| = 1,3$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 \quad \left(\sqrt[4]{(-1,3)}\right)^4 = |-1,3| = 1,3$$



Resolución de ecuaciones irracionales

En este tipo de ecuaciones la incógnita forma parte de una o más cantidades **SUBRADICALES** (o sea, están dentro de una raíz).

Por ejemplo: $\sqrt{x+5} = 4$ es una ecuación irracional, en tanto que $\sqrt{2} + x = \sqrt{5}$ no lo es, a pesar de que su solución es un número irracional.

Al resolver estas ecuaciones, debes siempre considerar lo descrito anteriormente **TODA RAÍZ PAR DEBE TENER UN ARGUMENTO (subradical) POSITIVO Y RESULTADO UN NÚMERO POSITIVO.**

Resolver una ecuación irracional significa encontrar el conjunto solución que la satisface, por eso, al determinar las soluciones de este tipo de ecuaciones, éstas **DEBEN SER COMPROBADAS EN LA ECUACIÓN ORIGINAL.**

Ejemplo 1:

$$\sqrt{x+5} + 2 = 0$$

$$\sqrt{x+5} = -2 \quad / ()^2$$

$$x+5 = 4$$

$$\boxed{x = -1}$$

Sin embargo ésta **NO ES SOLUCIÓN** de la ecuación primitiva, pues $(\sqrt{4} + 2 \neq 0)$, por lo tanto la ecuación tiene como conjunto solución $\emptyset$ (vacío). Si analizas con atención, verás que, el primer paso de la resolución de la ecuación muestra la contradicción, pues el resultado de la raíz es un número negativo ($\sqrt{x+5} = -2$)

Ejemplo 2:

$$\sqrt{4+2\sqrt{7x+1}} = 4 \quad / ()^2$$

$$4+2\sqrt{7x+1} = 16$$

$$2\sqrt{7x+1} = 12$$

$$\sqrt{7x+1} = 6 \quad / ()^2$$

$$7x+1 = 36$$

$$7x = 35$$

$$\boxed{x = 5}$$

Esta solución **SI SATISFACE** la ecuación primitiva (compruébalo), por lo tanto el conjunto solución de esta ecuación es: $S = \{5\}$.

Nunca hay raíces negativas en la resolución, y todos los argumentos de las raíces también son positivos.



Ejercicios Ecuaciones Exponenciales e Irracionales I

- Si $8 \cdot 2^x = 5^{y+8}$, entonces cuando $y = -8$, x es igual a:
A) -4
B) -3
C) 0
D) 4
E) 8
- La ecuación exponencial $2 \cdot 8^{2x-1} - 16^{3x-5} = 0$, $x = ?$
A) $\frac{18}{5}$
B) $-\frac{18}{5}$
C) -3
D) $\frac{10}{3}$
E) 3
- Si en la ecuación exponencial $3^{x+1} + 3^{-x} = 4$ se hace el cambio de variable $y = 3^x$ (incógnita auxiliar), entonces la ecuación se transforma en:
A) $3y^2 - 4y + 1 = 0$
B) $y^2 - 4y + 3 = 0$
C) $3y^2 + 4y - 1 = 0$
D) $3y^2 + 4y + 1 = 0$
E) $3y^2 - 4y - 1 = 0$

- Sabiendo que $p \in \mathbb{R}^+ \wedge p \neq 1$ y si $p^{-6a} = \sqrt{p^b}$, entonces $a =$

- A) $\frac{b}{3}$ C) $-\frac{b}{12}$ E) $-\frac{b}{24}$
B) $-\frac{b}{6}$ D) $\frac{b}{24}$

- Si $\sqrt[4]{a^{x-5}} = \sqrt[6]{a^{7x-3}} : \sqrt[6]{a^{43}}$, entonces el valor de x es:

- A) -7
B) $-\frac{1}{7}$
C) $\frac{1}{7}$
D) 1
E) 7

- Dada la ecuación $\sqrt{b^{3x+5}} = (\sqrt{b})^7$, $b \in \mathbb{R}^+ \wedge b \neq 1$, entonces $x =$

- A) 0
B) $\frac{2}{5}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{2}$
E) $\frac{5}{2}$



7. Si $(0,01)^{x-5} = 100$, entonces el valor de x es:

- A) 7
- B) 5
- C) 4
- D) 0
- E) $-\frac{7}{2}$

8. Si $3^{2x} \cdot 9^x \cdot 27^{2x} = \frac{1}{81^5}$; entonces $\frac{x}{2} =$

- A) 1
- B) $\frac{5}{6}$
- C) 0
- D) $-\frac{5}{6}$
- E) -1

9. El valor de x para el cuál se verifica la igualdad $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^{x-1} - 3^{x-3} = 170$ es:

- A) -1
- B) 0
- C) 1
- D) 2
- E) 3

10. Si $5 \cdot 2^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 14$, entonces $x =$

- A) 4
- B) 3
- C) 1
- D) -1
- E) -2^2

11. La solución de la ecuación $5^{4x} - 10 \cdot 5^{2x} + 25 = 0$ es:

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) $\frac{1}{2}$
- E) $\frac{1}{4}$

12. Si $\sqrt{x} + 5 = 2$, entonces el conjunto solución es:

- A) $\{-3\}$
- B) $\{3\}$
- C) $[-3, 3]$
- D) $\{9\}$
- E) $\emptyset$

13. El conjunto solución de la ecuación $x = \sqrt{20-x}$ es:

- A) $\emptyset$
- B) $\{4\}$
- C) $\{-5\}$
- D) $\{-5, 4\}$
- E) $\{-4, 5\}$

14. Al eliminar los radicales, con el objeto de resolver la ecuación irracional siguiente $-\sqrt{3x+1} + 2\sqrt{x-1} = 0$, se obtiene la ecuación:

- A) $2x - 1 - 3x + 1 = 0$
- B) $2(x - 1) - (3x + 1) = 0$
- C) $4(x - 1) - 3x + 1 = 0$
- D) $4(x - 1) - 3x - 1 = 0$
- E) $4x - 1 - 3x - 1 = 0$



15. El conjunto solución de la ecuación $4 + \sqrt{x+8} = x$ es:

- A) {1}
- B) {8}
- C) {1, 8}
- D) {0}
- E) $\emptyset$

16. El conjunto solución de la ecuación $x + \sqrt{5x+10} = 8$ es:

- A) {3}
- B) {18}
- C) {3, 18}
- D) {-3}
- E) {-18}

17. Si $2 - \sqrt{x-3} = 1$, entonces $\sqrt{2x} =$

- A) 1
- B) 4
- C) $\sqrt{3}$
- D) $2\sqrt{2}$
- E) $\sqrt{10}$

18. La(s) raíz(ces) de la ecuación $x + \sqrt{2-x} = 0$ es(son):

- A) Dos raíces enteras: una positiva y la otra negativa
- B) Dos raíces enteras negativas
- C) Una raíz entera positiva
- D) Una raíz entera negativa
- E) Ninguna raíz entera

19. La(s) solución(es) de la ecuación $x - 2 = \sqrt{x^2 + x - 21}$ es(son):

- I. -5
- II. -15
- III. 15
- IV. 5

- A) Sólo I
- B) Sólo I y II
- C) Sólo II y III
- D) Sólo II y IV
- E) Sólo IV

20. La ecuación $x + \sqrt{x-2} = 4$ tiene exactamente:

- A) Dos raíces reales
- B) Una raíz real y la otra imaginaria
- C) Dos raíces imaginarias
- D) Ninguna raíz real
- E) Una raíz real

21. Si $\sqrt{2+x} - \sqrt{x} = 2$, entonces el conjunto solución de la ecuación es:

- A) $\emptyset$
- B) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
- C) $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$
- D) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$
- E) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$



Ejercicios Ecuaciones Exponenciales e Irracionales II

1. Si $(2^{-5})^x = 8^{4x+3}$. Cuál es el valor de x que satisface la ecuación?

- A) $\frac{-9}{17}$
- B) $\frac{-9}{17}$
- C) $\frac{9}{17}$
- D) $\frac{9}{17}$
- E) $\frac{9}{8}$

2. El producto de las raíces de $\frac{1}{40^{30}} \cdot \left(\frac{1}{4^{-x}}\right)^x = 4 \cdot 16^2$ es:

- A) -35
- B) $-\sqrt{35}$
- C) $\pm\sqrt{35}$
- D) $\sqrt{35}$
- E) 35

3. Encontrar el valor de x en: $4^{3x+10} = 2^{32}$

- A) $\frac{3}{22}$
- B) 2
- C) 4
- D) 6
- E) $\frac{22}{3}$

4. Una población de bacterias crece dado la función $f(x) = k \cdot 3^x$, donde k es el número inicial de bacterias por colonia y x es el tiempo en minutos. Si una colonia posee inicialmente 2 bacterias. ¿Cuántas bacterias habrá en el minuto 3?

- A) 54
- B) 64
- C) 70
- D) 108
- E) 540

5. Si $3^{2a} = 9$, ¿Cuál es el valor de a ?

- A) -1
- B) 0
- C) 1
- D) 2
- E) 3

6. La solución de la ecuación $4 \cdot 8^{2x-1} - 16^{3x-4} = 0$ es:

- A) $\frac{-15}{6}$
- B) $\frac{-6}{15}$
- C) $\frac{6}{15}$
- D) $\frac{15}{6}$
- E) $\frac{16}{3}$



7. ¿Cuál(es) de los siguientes valores de x hacen que la expresión $5^{x+1} - 5^x$ sea divisible por 10?

- I. 1
- II. 2
- III. 3

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo I y II
- D) Sólo II y III
- E) I, II y III

8. En el comportamiento del crecimiento de una población de bacterias se observa que la cantidad inicial de bacterias se duplica cada 3 minutos. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) **verdadera(s)** si inicialmente hay **5000 bacterias**?

- I. Dentro de 3 minutos habrán 10.000 bacterias
- II. Dentro de 6 minutos habrán 15.000 bacterias
- III. Dentro de x minutos habrán $5000 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo I y II
- D) Sólo I y III
- E) I, II y III

9. Al cabo de t minutos, la temperatura T de cierto objeto está dada por $T = 20 + 81 \cdot 3^{-t}$ °C. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura sea de 23°C?

- A) -3
- B) 3
- C) 4
- D) -4
- E) 1

10. La población de un país dentro de t años está dada por la relación $P(t) = 2 \cdot 3^{\frac{2t}{3}}$ millones de habitantes. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la población del país sea de 162 millones de habitantes?

- A) 4.5
- B) 4
- C) 6
- D) -6
- E) 12

11. Determina el valor de x en la siguiente ecuación exponencial

$$(a^{5x+1})^5 = (a^{7x-1})^7 \cdot (a^{x-6})^9$$

- A) 2
- B) -2
- C) 4
- D) 66
- E) 11

12. Encuentre el valor de x en la siguiente ecuación

$$\sqrt[3]{z^{5x-3}} = z^{x+5}$$

- A) 6
- B) 15
- C) 1
- D) 2
- E) 9

13. El valor de x en la expresión $(0.25^{x+1}) = (0.125^{x-1})$ es:

- A) 5
- B) 1
- C) -5
- D) -1
- E) 0



14. El conjunto solución de la siguiente ecuación irracional $(\sqrt{2x-3}) - x = -1$ es:

- A) $\{2, -2\}$
- B) $\{2\}$
- C) $\{-2\}$
- D) $\{-2, 0\}$
- E) $\{-2\}$

15. La solución de la ecuación $(\sqrt{5x+4}) - 1 = 2x$ es:

- A) 2
- B) 1
- C) $\frac{-3}{4}$
- D) $\frac{-3}{2}$
- E) Ninguna de las anteriores

16. La solución de la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = 2$ tiene por conjunto a:

- A) $\{0, 4\}$
- B) $[4]$
- C) $\{4\}$
- D) $[0, 4]$
- E) Ninguna de las anteriores

17. En la ecuación $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$ el valor correcto de x es:

- A) 5
- B) 221
- C) -5
- D) -221
- E) 6

18. El valor de x en $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} = 6$ es:

- A) $\frac{89}{16}$
- B) $\frac{9}{16}$
- C) $\frac{-89}{16}$
- D) 0
- E) Ninguna de las anteriores

19. Resuelva

1. $\sqrt{4 + \sqrt{16x^2 + 8x^3 + x^4}} = 2$

2. $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

3. $\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{x - \sqrt{2x+1}}}} = 1$

4. $\sqrt{3x-6} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{9x+4}$

5. $2\sqrt{\frac{1}{5}x-2} = 2 + \sqrt{\frac{1}{6}x-1}$

6. $1-x = \sqrt{1-x}\sqrt{4-7x^2}$

7. $\sqrt{x^2+x+4} = 2 + \sqrt{x^2-2x+1}$

8. $\sqrt{x^3-8x^2+x-14} - \frac{1}{2}\sqrt{4x^3-30x^2-20x-16} = 0$

**Pauta****Ejercicios de Ecuaciones Exponenciales e Irracionales I**

- | | | | |
|------|-------|-------|-------|
| 1. B | 7. C | 13. B | 19. E |
| 2. E | 8. E | 14. D | 20. C |
| 3. A | 9. C | 15. B | 21. D |
| 4. C | 10. A | 16. A | |
| 5. E | 11. D | 17. D | |
| 6. C | 12. E | 18. E | |

Pauta**Ejercicios de Ecuaciones Exponenciales e Irracionales II**

- | | | | |
|------|-------|-------|-------|
| 1. A | 6. D | 11. B | 16. C |
| 2. A | 7. E | 12. E | 17. A |
| 3. B | 8. D | 13. A | 18. A |
| 4. C | 9. B | 14. B | |
| 5. A | 10. C | 15. B | |

Pauta Pregunta 19

1. $X_1 = 0$; $X_2 = 0$; $X_3 = -4$; $X_4 = -4$
2. $X_1 = 9$; $X_2 = 14$ (solo el valor 9 satisface la ecuación)
3. $X = 4$
4. $X_1 = 5$; $X_2 = -4$ (solo el valor 5 satisface la ecuación)
5. $X_1 = 30$; $X_2 = 11,385$ (solo el valor 30 satisface la ecuación)
6. $X_1 = 0$; $X_2 = 1/2$
7. $X_1 = 3$; $X_2 = 5/7$
8. $X_1 = 10$; $X_2 = 2$