SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 3: MEDICIÓN DE ÁREA.

INTRODUCCIÓN

En este taller se comenzó trabajando el concepto de equidescomposición de figuras, el concepto de área y la medición de área utilizando como unidad de medida la superficie de una figura y la unidad cuadrada. Luego se obtuvo el área de un rectángulo usando como unidad de medida el metro cuadrado y se dedujo una forma para calcular su área conociendo las medidas de sus lados. Finalmente, se trabajó la estimación del área, las propiedades del área y tres movimientos rígidos básicos: *traslaciones*, *rotaciones* y *reflexiones*.

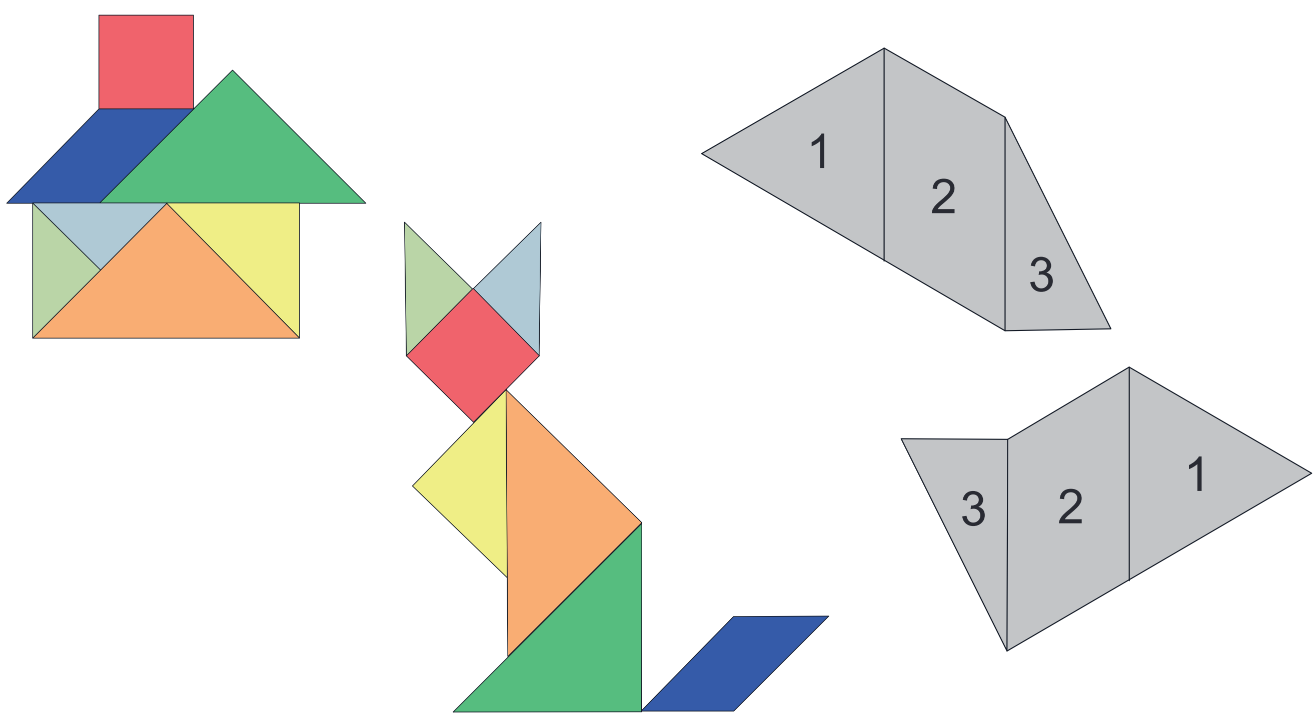
Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos:

- Equidescomposición de figuras.
- Medición del área.
- Unidades de medida.
- Área de un rectángulo.
- Estimación del área.
- Propiedades del área.
- Movimientos rígidos: traslación, rotación y reflexión.

1- Figuras equidescomponibles

Diremos que dos figuras son *equidescomponibles* si es posible descomponer una de ellas en un número finito de partes, las cuales pueden reubicarse, ya sea trasladando, rotando o reflejando, para formar la otra figura, sin que las partes queden sobrepuestas.

Por ejemplo, los siguientes pares de figuras son equidescomponibles:



Notamos que al trasladar, rotar y reflejar las piezas, estas no se deforman, por lo que la cantidad de superficie que cubren es siempre la misma. Esto corresponde al principio de conservación.

Comentarios

- El concepto de equidescomposición permite un acercamiento al trabajo con superficies y áreas, por lo tanto es importante abordar esta idea. Sin embargo, no es recomendable traspasar su definición formal al aula.
- Para trabajar el concepto anterior, es conveniente partir con un conjunto de piezas y utilizar figuras que pueden ser armadas con esas mismas piezas. También se puede trabajar la comparación de figuras empleando piezas iguales. Esto último puede ser usado como un apresto para el concepto de unidad de medida de área y la medición de ella a través de la iteración de este patrón.

Ubicación: Módulo 1

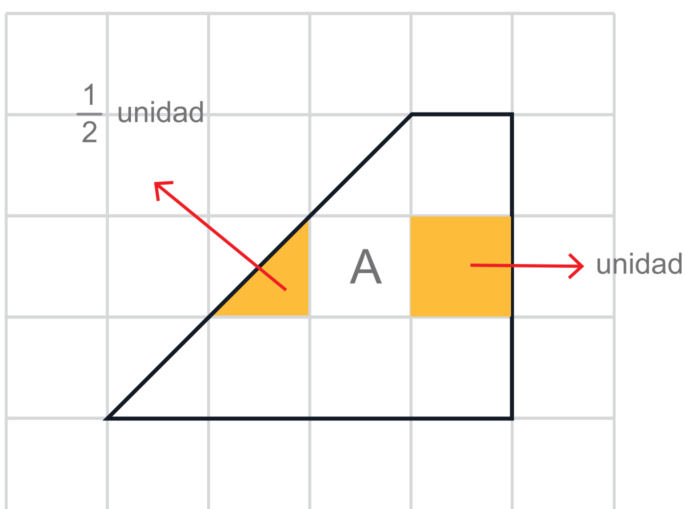
Taller: Medición de área.
Actividad: Tangrama y áreas.

2- Medición de área

Una superficie es una magnitud, es decir, un atributo que puede ser medido. Llamaremos *área* a la medida de una superficie.

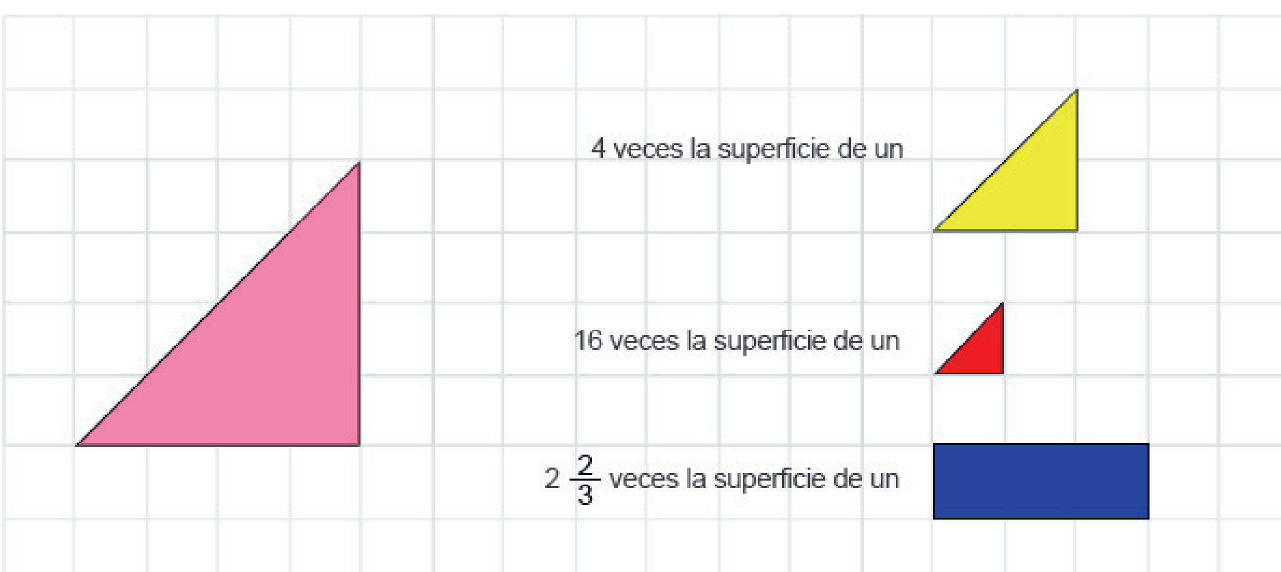
Como el atributo por medir es la superficie, escogemos una unidad de medida y vemos cuántas veces cabe en la figura por medio de la iteración de la unidad.

Cuando la unidad utilizada no cabe una cantidad entera de veces, podemos particionarla. Por ejemplo, para obtener el área de la figura A, debemos dividir la unidad, como se muestra en la figura:



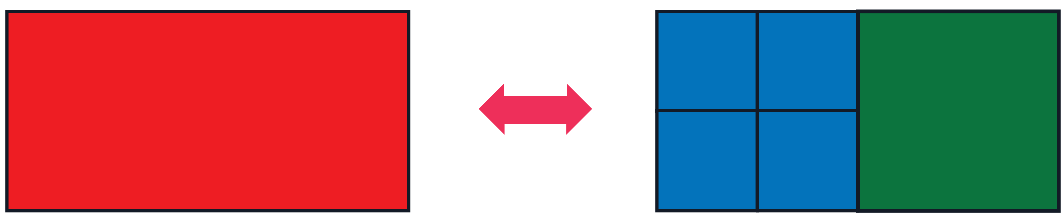
El área de la figura A es $7\frac{1}{2}$ unidades.

Es posible obtener el área de una superficie utilizando distintas unidades de medida. Por ejemplo, en la imagen que se muestra a continuación, el área del triángulo rosado corresponde a la superficie de 4 triángulos amarillos, 16 triángulos rojos y $2\frac{2}{3}$ rectángulos azules.



Comentarios

- Un error común es usar simultáneamente distintas unidades para medir un área, por ejemplo, decir que el área del siguiente rectángulo es 4 + 1= 5 cuadrados.



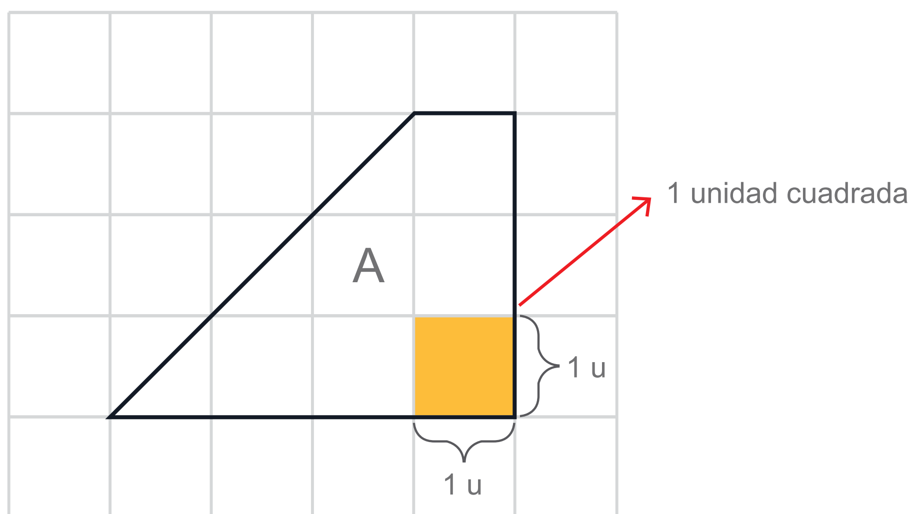
- Es importante utilizar diversos recursos para iniciar el estudio del concepto de área. Por ejemplo, se puede emplear papel lustre, hojas cuadriculadas y distintas figuras geométricas dibujadas sobre cartulina.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Medición de área.
Actividad: Tangrama y áreas.

3- Unidad cuadrada

La unidad de superficie que típicamente se escoge para obtener el área de una figura es un cuadrado.



Cuando decimos que el área de la figura A corresponde a la superficie de $7\frac{1}{2}$ cuadrados y además suponemos que el lado de cada cuadrado es de 1 unidad, lo que estamos diciendo es que el área de la figura A es igual a $7\frac{1}{2}$ unidades cuadradas. Esto lo anotaremos como $7\frac{1}{2}\ u^2$.

Comentarios

- Como con cualquier otra unidad, para medir una superficie utilizando la unidad cuadrada, es importante que esta sea cubierta completamente por cuadrados, sin sobreponer unidades ni dejar espacios entre ellas.

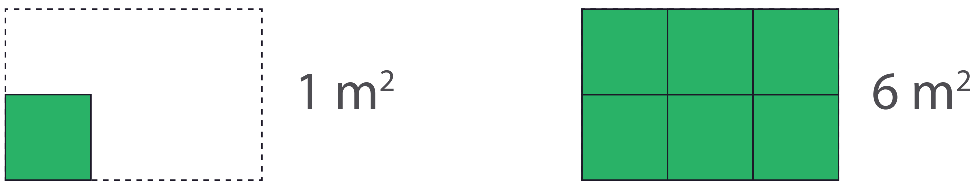
Ubicación: Módulo 1

Taller: Medición de área.
Actividad: Tangrama y áreas.

4- El metro cuadrado

La unidad de medida de superficie usada por el Sistema Internacional de Unidades es el metro cuadrado, que se denota como **m^2**. Un metro cuadrado corresponde al área de la superficie delimitada por un cuadrado de lado 1 metro.

Para medir una superficie rectangular con metros cuadrados, se puede iterar la unidad de medida hasta que la cubra completamente, tal como se muestra en la siguiente imagen:



Otro procedimiento para establecer el área de una superficie rectangular es particionar o descomponer dicha superficie en cuadrados de igual medida.

Por ejemplo, para determinar que el área del siguiente rectángulo es 12 m^2, se puede efectuar una descomposición como la que se muestra a continuación:

1 m^2	1 m^2	1 m^2
1 m^2	1 m^2	1 m^2
1 m^2	1 m^2	1 m^2
1 m^2	1 m^2	1 m^2

Comentarios

- Para establecer la medida del área por conteo, es importante que al particionar o descomponer la superficie, las figuras que se forman tengan igual superficie entre ellas; en caso contrario, el conteo no necesariamente establecería una medida de la superficie inicial.
- Las unidades de medida de área usan los mismos prefijos que las unidades de medida de longitud, ya que se derivan de estas últimas. Además, dos unidades de área consecutivas se relacionan de la siguiente manera: la mayor es 100 veces la menor. Por ejemplo:

$$1\ m^2 = 100\ dm^2$$
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2$$
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2$$

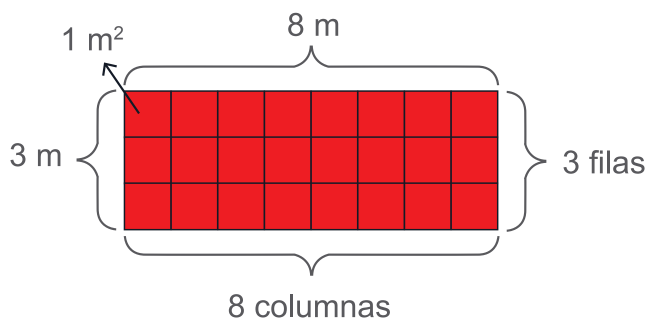
Ubicación: Módulo 1

Taller: Medición de área.
Actividad: Diseñando jardines.

5- Área de un rectángulo de lados naturales *a* y *b*

Para un rectángulo cuyos lados miden a metros y b metros, con a y b números naturales, tendremos que su área es $a \cdot b$ m^2.

Por ejemplo, si queremos calcular el área del rectángulo rojo, los cuadrados pueden contarse considerando que hay 3 filas y que cada una de ellas tiene un área de 8 m^2, es decir, $3 \cdot 8$ m^2, o considerando que hay 8 columnas y que cada una de ellas tiene un área de 3 m^2, es decir, $8 \cdot 3$ m^2. En ambos casos resulta 24 m^2.



Comentarios

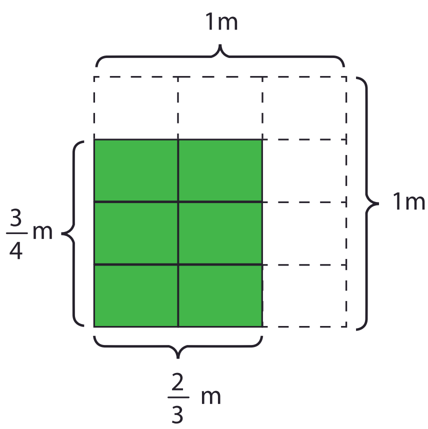
- Para comprender mejor la noción de superficie como una magnitud bidimensional, es importante que los estudiantes visualicen que al cubrir un rectángulo con cuadrados, estos se alinean formando filas y columnas.

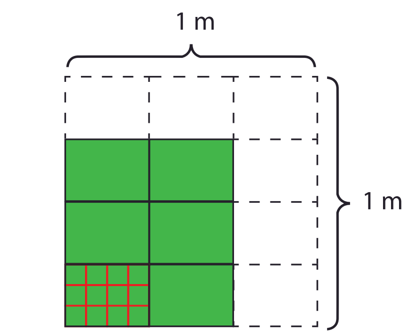
Ubicación: Módulo 1

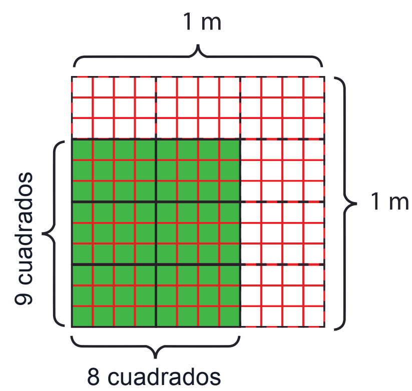
Taller: Medición de área.
Actividad: Diseñando jardines.

6- Área de un rectángulo de lados racionales *a* y *b*

En las siguientes imágenes podemos visualizar un ejemplo genérico que nos permite justificar por qué la propiedad anterior se puede extender para el caso en que los lados son números racionales.







Queremos calcular el área del rectángulo verde de lados $\frac{2}{3}$ m y $\frac{3}{4}$ m.

Una forma para poder determinarla es encontrar un cuadrado que cubra un número entero de veces este rectángulo.

Lo anterior se logra si dividimos en 4 partes cada tercio de metro y en 3 partes cada cuarto de metro, como se muestra en la imagen. Notemos que cada cuadrado (de lados de color rojo) queda determinado por $\frac{1}{12}$ m de lado y su área es $\frac{1}{12 \cdot 12}$ m^2

Luego, el área del rectángulo verde es

$$\text{Área} = 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{12 \cdot 12}\ m^2$$

$$\text{Área} = \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{12}\ m^2$$

$$\text{Área} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\ m^2$$

Es decir, el área del rectángulo corresponde al producto de la longitud de sus lados.

Comentarios

- El área de un rectángulo cuyos lados miden *a* unidades y *b* unidades es *a* · *b* unidades cuadradas, sin importar si *a* y *b* son números naturales o fracciones. Esto se puede extender al caso de longitud real positiva cualquiera.

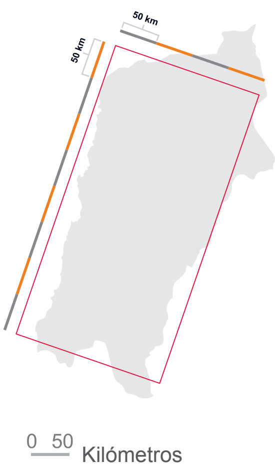
Ubicación: Módulo 1

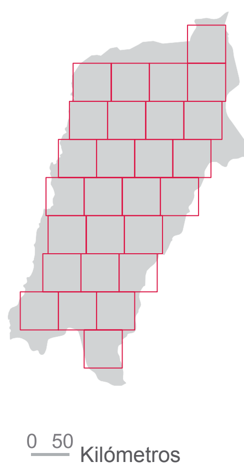
Taller: Medición de área.
Actividad: Diseñando jardines.

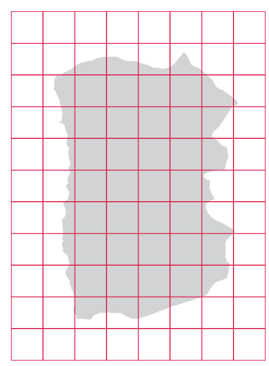
7- Estimación de áreas de superficies irregulares

Cuando nos enfrentamos a superficies irregulares, no es posible calcular su área utilizando fórmulas convencionales. Sin embargo, existen estrategias útiles para estimar dicha medida, por ejemplo, si queremos obtener el área de una región del mapa podemos:

- Compararla con el área de un rectángulo.
- Cubrir la superficie de la región con rectángulos u otros polígonos.
- Utilizar el conteo de cuadrículas.
- Utilizar un referente.







Comentarios

- Es importante reconocer que la validez de un método de estimación depende del contexto y del uso que se le dará. Por ejemplo, a veces conviene tener certeza de que la estimación excede el valor real y en otras ocasiones de que es menor.
- Un aspecto esencial de la estimación es valorar el resultado, es decir, ser capaz de juzgar cuán razonable resultó ser. En este sentido el error que se comete al estimar debe ser analizado en relación con el valor real. No es lo mismo equivocarse en 10 m^2 al estimar la superficie de una sala de clases, que al estimar la superficie de Santiago.
- Tal como se hizo en el caso de longitud, en el que se estimó la medida de un objeto utilizando la de otro, acá estimamos la superficie de la Región de Atacama utilizando la de la Región de La Araucanía como referente.

Ubicación: Módulo 1

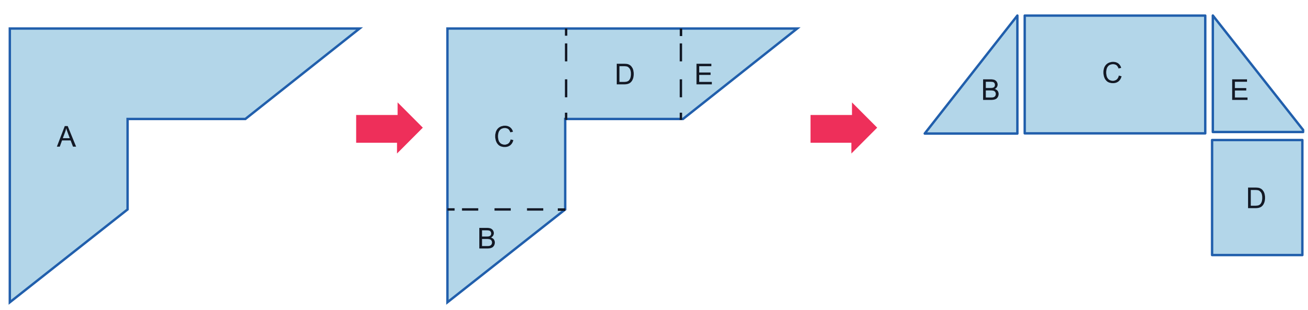
Taller: Medición de área.
Actividad: Pintando las regiones.

8- Propiedades del área

- *Principio de conservación* del área:

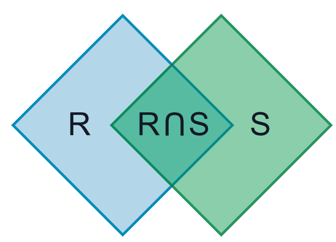
- Al descomponer una figura en otras, o al juntar figuras para formar una nueva, el área total es igual a la suma de las áreas de las partes.

- Al mover sin deformar una figura se mantiene su área.



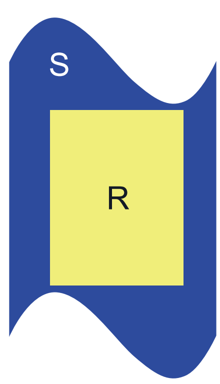
Área (A) = Área(B) + Área (C) + Área (D) + Área (E)

- Otra propiedad del área nos dice que para dos figuras planas cualesquiera R y S, se tiene que:



Área (R ∪ S) = Área (R) + Área (S) - Área (R ∩ S)

- Si una superficie R está contenida en la superficie S, entonces el Área (S) es mayor que el Área de (R).



Área (S) ≥ Área (R)

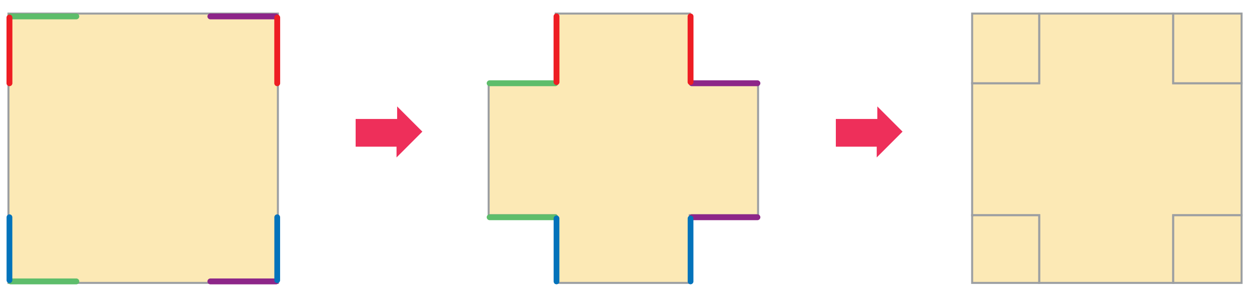
- Para cualquier superficie R, Área (R) ≥ 0.

- El área de rectas y puntos es igual a cero.

Comentarios

- De manera similar que en el caso de la medición lineal, la conservación del área es una propiedad fundamental que contribuye a comprender la noción de área, y una de sus aplicaciones es calcular áreas de diversas figuras.

- Notemos que al descomponer una figura y juntar las partes formando otra, se conserva el área, pero no necesariamente el perímetro. De manera análoga, si una línea que delimita una región se corta y se vuelve a unir para formar una nueva figura, se conserva el perímetro, pero no necesariamente el área.



- Las propiedades anteriores no se suelen explicitar en la enseñanza escolar, pero sí están implícitas en muchos razonamientos geométricos. Por esta razón, es importante estudiarlas, pero con el propósito de tener una comprensión acabada de los contenidos y no para transmitirlos de manera directa en la sala de clases.

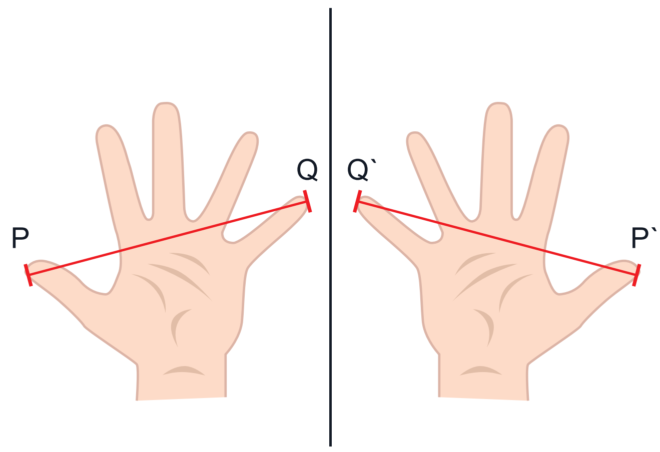
Ubicación: Módulo 1

Taller: Medición de área.
Actividad: Remodelando con propiedades de área.

9- Movimientos rígidos del plano

Los *movimientos rígidos* son transformaciones que conservan las distancias entre todos los pares de puntos del plano. Es decir, la distancia entre cualquier par de puntos P y Q es igual a la distancia entre sus imágenes P' y Q' por dicha transformación.

PQ = P'Q', para todo par de puntos P y Q.



Existen tres movimientos rígidos básicos: *traslaciones, rotaciones y reflexiones*. A partir de ellos se puede obtener un movimiento rígido cualquiera.

Los movimientos rígidos también se llaman *isometrías* o *transformaciones isométricas*, ya que cambian de ubicación o posición a las figuras, pero mantienen su tamaño, forma y medidas.

Comentarios

- Notemos que la definición de transformación isométrica tiene como consecuencia que al rotar, trasladar o reflejar una unidad de medida, esta no se deforma y conserva su tamaño. Esta observación justifica el principio de iteración en el proceso de medir, puesto que durante este la unidad de medida se itera en diversas posiciones hasta cubrir completamente el objeto.
- Diremos que una figura es congruente con otra cuando una es imagen de la otra mediante un movimiento rígido. Se verifica que cuando dos objetos geométricos tienen lados y ángulos respectivos de igual medida, son congruentes. Una consecuencia importante es que *figuras congruentes tienen igual área*.

Ubicación: Módulo 1

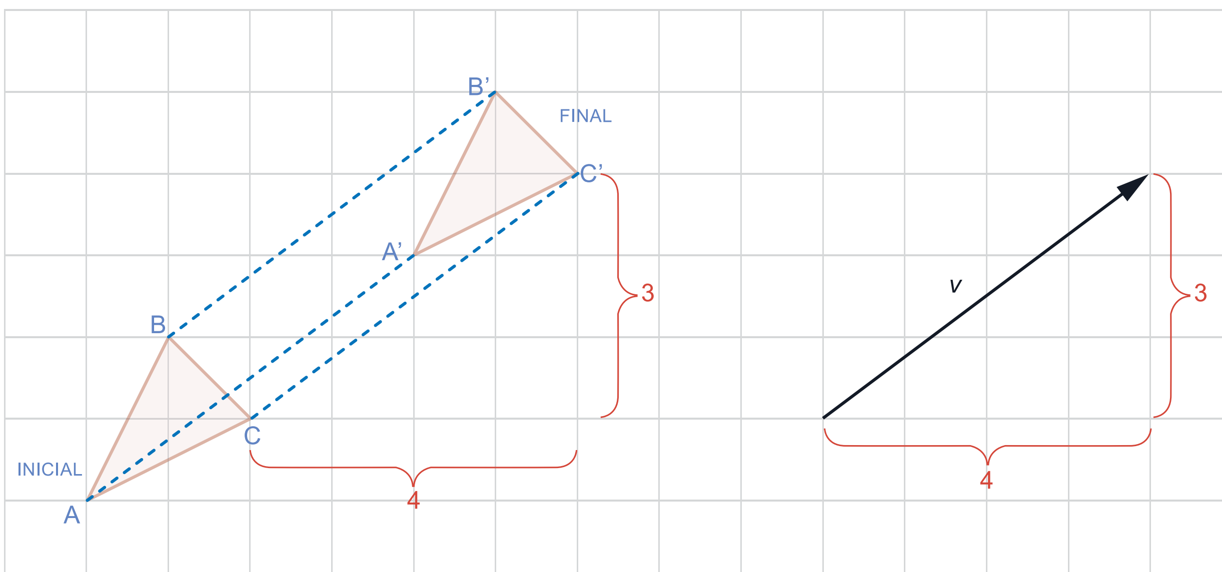
Taller: Medición de área.
Actividad: El área en movimiento.

10- Traslación

Una *traslación* es un movimiento que desplaza en la misma dirección, sentido y magnitud todos los puntos de una figura en el plano.

Para denotar las traslaciones usaremos el símbolo $T_{(a,b)}$, lo que nos dice que todo punto de la figura desplazada se mueve a unidades horizontalmente y b unidades verticalmente en el plano.

A cada traslación se le asocia su *vector de traslación v*, el cual es un segmento orientado que tiene la misma dirección (horizontal, vertical u oblicua), sentido (derecha, izquierda, arriba, abajo) y magnitud (longitud del segmento) que el desplazamiento realizado.



En la imagen, la traslación tiene dirección oblicua, sentido hacia arriba y se desplaza 4 unidades horizontalmente y 3 verticalmente, como lo indica su vector de traslación v.

Comentarios

En una traslación con notación $T_{(a,\, b)}$:

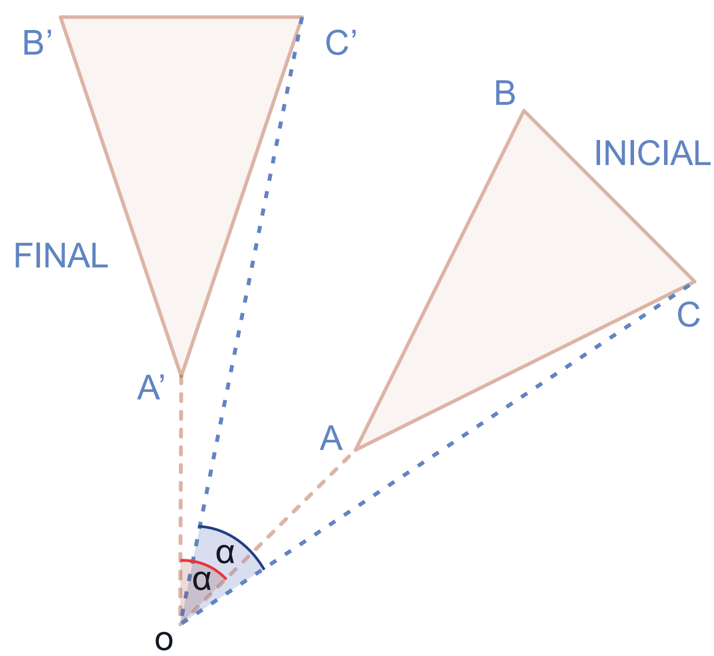
- Cuando el desplazamiento horizontal es hacia la derecha, entonces $a > 0$.
- Cuando el desplazamiento horizontal es hacia la izquierda, entonces $a < 0$.
- Si el movimiento vertical es hacia arriba, entonces $b > 0$.
- Si el movimiento vertical es hacia abajo, entonces $b < 0$.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Medición de área.
Actividad: El área en movimiento.

11- Rotación

La *rotación* es un movimiento sobre el plano que gira todos los puntos de una figura en torno a un punto fijo *O* y según un ángulo *α* dado.



En toda rotación, independiente del ángulo y del centro de rotación, se obtiene una nueva figura de igual forma y con las mismas dimensiones que la original.

Comentarios

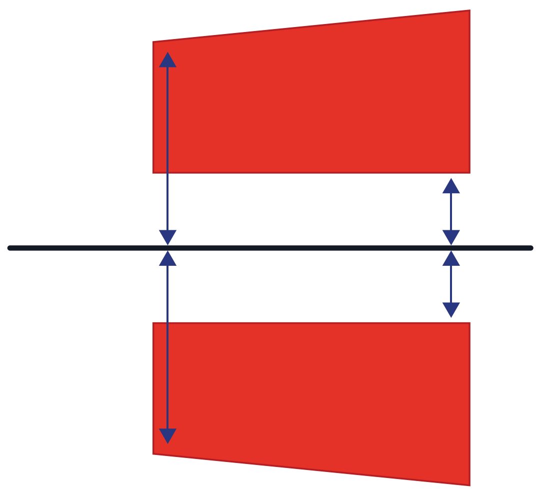
- Es importante notar que cuando se rota una figura, el punto en torno al cual se gira puede estar dentro o fuera de ella.

Ubicación: Módulo 1

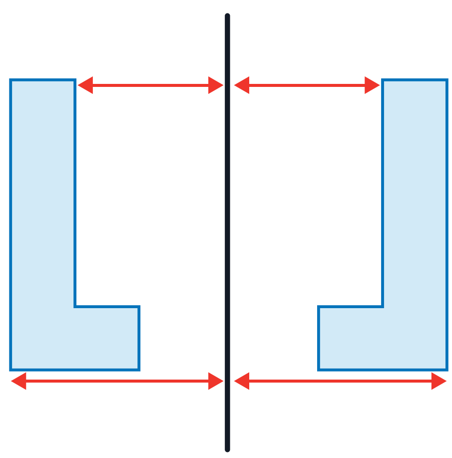
Taller: Medición de área.
Actividad: El área en movimiento.

12- Reflexión

Una *reflexión* mueve una figura de la misma forma que cuando se pone un objeto frente a un espejo: se ve el mismo objeto, del mismo tamaño, pero con una orientación diferente. La recta a través de la cual se refleja el objeto se llama *eje de reflexión*.

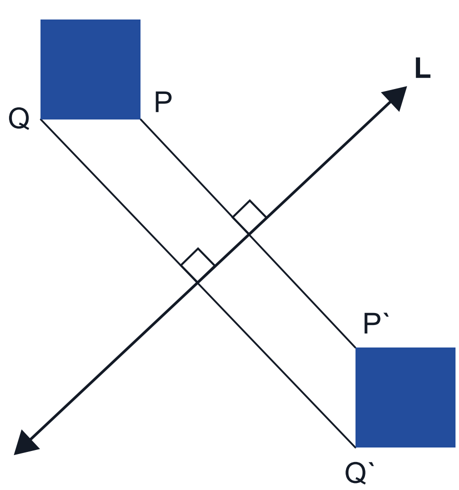


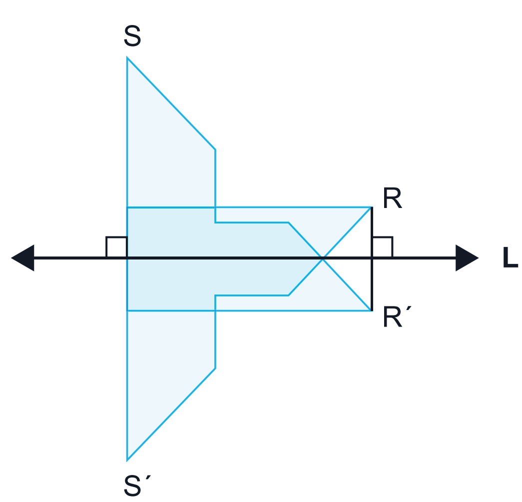
Todo punto de la figura original está a la misma distancia del eje de reflexión que el mismo punto de la figura reflejada, pero al lado opuesto. Además, la figura obtenida a partir de la reflexión tiene la misma forma e iguales dimensiones que la original.



La *reflexión* de un figura P con respecto a una recta L es una nueva figura P' que llamaremos su imagen, tal que:

Cada punto de P y su correspondiente en P' están a la misma distancia de L, pero en lados distintos, y la recta que pasa por ambos puntos correspondientes es perpendicular a L.





Comentarios

- Es importante notar que cuando se refleja una figura, el eje de reflexión puede cortar o no a la figura.

Ubicación: Módulo 1

Taller: Medición de área.
Actividad: El área en movimiento.