SUMA Y SIGUE
MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE
CMM
Centro de Modelamiento Matemático
Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER:
NÚMEROS DECIMALES

INTRODUCCIÓN

En este taller se buscó explorar las relaciones entre dos importantes representaciones numéricas en el ámbito escolar: las fracciones y la notación decimal. Se consideró el uso de la recta numérica, de la tabla de valor posicional y de otros recursos. Además, se abordó el orden y comparación de racionales y la no existencia de sucesor ni antecesor en los números decimales.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos:

- Notación fraccionaria y decimal de números racionales.
- Valor posicional de posiciones inferiores a la unidad.
- Orden y comparación en la recta numérica.
- Estrategias de comparación de números racionales.

TALLER: NÚMEROS DECIMALES.

1-Números decimales.

En este curso llamaremos **números decimales** o simplemente **decimales** a cualquier número que esté expresado a través de su notación decimal, ya sea finita o infinita.
Por ejemplo:

$$\frac{12}{5} = 2{,}4$$

$$\frac{13}{6} = 2{,}166666...$$

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$$

Al escribir números decimales infinitos es usual ocupar puntos suspensivos (...) para indicar que el número tiene más dígitos a su derecha. Dado que estos no señalan necesariamente que hay dígitos que se repiten, se utiliza para ello una notación particular. Esta consiste en colocar una raya sobre el o los dígitos que se repiten, que reciben el nombre de **período**; por ejemplo, $2{,}166666\ldots = 2{,}1\overline{6}$.

Otros autores se refieren a los números decimales como aquellos que se pueden expresar a través de una fracción decimal. Por ejemplo, según esta definición, $\frac{12}{5} = 2{,}4$ sería un número decimal, en cambio, $\frac{13}{6} = 2{,}166666\ldots$ y $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ no lo serían.

Comentarios

Es importante que se reconozcan y trabajen las distintas formas en las que se puede denotar un número decimal. Esto posibilita tanto el uso de una variedad de estrategias de cálculo como una comprensión profunda de los números decimales. Por ejemplo, el número 7,23 se podría expresar, entre otras, de las siguientes maneras:

$7{,}230$	$7 + 0{,}23$	$7 + 0{,}2 + 0{,}03$
$\frac{723}{100}$	$7 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}01$	$7 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$
$7 + \frac{23}{100}$	$7{,}22\overline{9}$	$\frac{72}{10} + \frac{3}{100}$

Hay clasificaciones que distinguen entre números decimales infinitos periódicos y semiperiódicos para diferenciar aquellos en los que el período comienza inmediatamente después de la coma, de los que presentan una cantidad de cifras después de la coma y antes del período, respectivamente.

Ubicación

Taller: Números decimales.
Actividad : Expresando distancias a la escuela en notación decimal.

2- Notación y descomposición decimal.

La notación **decimal o expansión decimal** de las fracciones usa el mismo sistema de numeración posicional de base 10 que en los números naturales: cada posición es $\frac{1}{10}$ de la que se encuentra a su izquierda. A las posiciones agregadas a la derecha de la unidad se les conoce como *décimos*, *centésimos*, *milésimos*, etc., dependiendo de la potencia de 10 involucrada.

C	D	U	d	c	m	dm
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$

: 10   : 10   : 10   : 10   : 10   : 10

En esta notación, por convención, se coloca una coma a la derecha de la unidad y a continuación se escribe la cantidad de décimos, centésimos, milésimos, etc., del número.

Todas las fracciones decimales se pueden descomponer en una suma de términos en los que aparecen **décimos**, **centésimos**, **milésimos**, **etc**., tales que sus numeradores son enteros entre 0 y 9, por ejemplo:

$$\frac{3208}{100} = 3 + \frac{2}{10} + \frac{0}{100} + \frac{8}{1000} = 3{,}208$$

Una notación similar para esta descomposición sería escribir cada término de la suma como el producto de un entero entre 0 y 9; y una fracción decimal con numerador 1 y denominador una potencia de 10. Por ejemplo:

$$\frac{3208}{100} = 3 \bullet 1 + 2 \bullet \frac{1}{10} + 0 \bullet \frac{1}{100} + 8 \bullet \frac{1}{1000} = 3{,}208$$

Al expresar números en notación decimal es importante escribir los ceros intermedios para asegurar su correcta interpretación, por ejemplo, 3,208 ≠ 3,28.

Comentarios

La notación decimal tiene algunas ventajas respecto a otras formas de escribir las fracciones, como por ejemplo al operar o comparar algunos números. Es un sistema simple, económico y permite identificar rápidamente el valor de la posición ocupada por cada dígito.

En ocasiones, en la enseñanza se hace una distinción entre “décimas” y “décimos”, asociando la primera a “0,1” y la segunda a “$\frac{1}{10}$”. Esta distinción, si bien es válida, no contribuye al logro de una comprensión profunda de las fracciones y los números decimales.

Los denominadores de los términos fraccionarios en la descomposición en sumas se suelen ordenar de manera creciente.

La descomposición en sumas permite ampliar el uso del sistema de numeración decimal a unidades menores que 1.

TALLER: NÚMEROS DECIMALES.

Ubicación

Taller: Números decimales.
Actividad : Adivinando la distancia de la casa a la escuela
Expresando distancias a la escuela en notación decimal

3- Fracciones decimales.

Se denomina **fracción decimal** a cualquier fracción que se pueda escribir con denominador potencia de 10. Por ejemplo:

$$\frac{27}{100}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{(2 \bullet 2)}{(5 \bullet 2)} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{9}{300} = \frac{(9 : 3)}{(300 : 3)} = \frac{3}{100}$$

$$3 = \frac{3}{1}$$

$$\frac{18}{125} = \frac{(18 \bullet 8)}{(125 \bullet 8)} = \frac{144}{1000}$$

Estos números admiten una expansión decimal finita, aunque también se les puede asociar una expansión decimal infinita.

Por ejemplo: $\frac{12}{5} = 2{,}4 = 2{,}3\overline{9}$.

A las fracciones que no se pueden escribir con denominadores potencias de 10 las llamaremos **fracciones no decimales**.

Por ejemplo: $\frac{7}{3}$, $\frac{4}{11}$

Las fracciones no decimales solo pueden ser expresadas mediante notación decimal infinita. Por ejemplo, para la fracción no decimal $\frac{7}{3}$, se tiene:

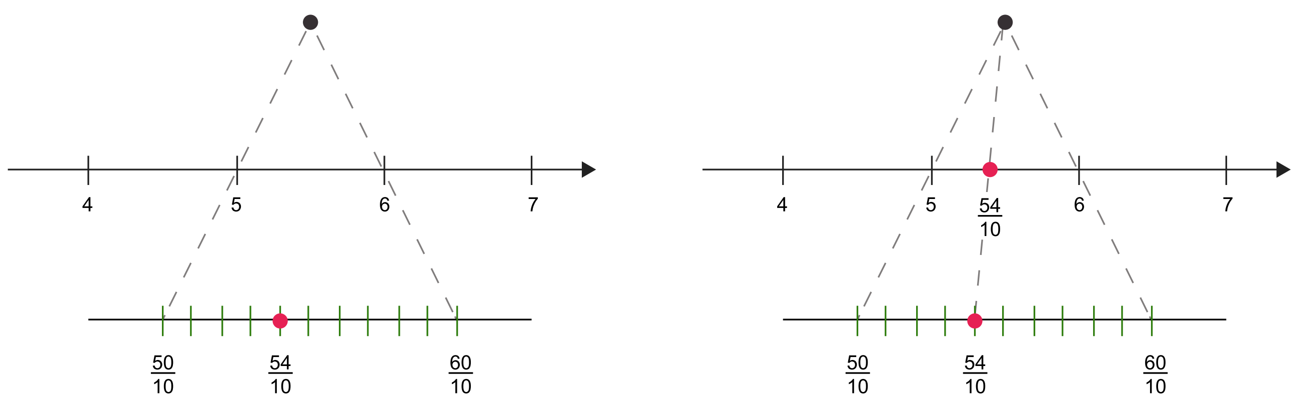
$$\frac{7}{3} = 2{,}3333... = 2{,}\overline{3}$$

Comentarios

Algunas potencias de diez son: $1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1.000 = 10^3$, etc.

Hay distintas estrategias para decidir si una fracción es decimal. Las más usuales se basan en el análisis de la representación irreducible de la fracción: si su denominador es 1 o al descomponer su denominador sus únicos factores primos son el 2, el 5 o ambos, la fracción es decimal. Por ejemplo, $\frac{7}{20} = \frac{7}{(2 \cdot 2 \cdot 5)}$ es fracción decimal, mientras que $\frac{3}{70} = \frac{3}{(7 \cdot 2 \cdot 5)}$ no lo es.

Una manera de representar $\frac{54}{10}$ en la recta numérica consiste en ampliar el segmento entre 5 y 6, subdividirlo en 10 partes iguales y ubicar la marca de graduación que coincide con dicha fracción, de la siguiente manera.



Ubicación

Taller: Números decimales.
Actividad : Adivinando la distancia de la casa a la escuela
Expresando distancias a la escuela en notación decimal

4- Escritura de fracciones decimales.

Una manera de escribir fracciones decimales en notación decimal se basa en la forma en que se leen estas fracciones, ya que se puede representar directamente en la tabla de valor posicional siguiendo el procedimiento que se describe a continuación:

- Dada una fracción decimal, de acuerdo con la potencia del denominador es posible leerla como décimos, centésimos, milésimos, etc.

$$\frac{453}{100} \longrightarrow \text{“453 Centésimos”}$$

- Luego ubicamos el 3 en la columna de los centésimos de la tabla y el resto de los dígitos en las posiciones que están inmediatamente a la izquierda.

D	U	d	c	m
			3	

→

D	U	d	c	m
	4	5	3	

Entonces, $\frac{453}{100} = 4{,}53$.

Comentarios

Notemos que para pasar de una forma de representación a otra no fue necesario descomponer en fracciones decimales.

Los números decimales a menudo se leen sin considerar el valor posicional de sus dígitos. Por ejemplo, 8,13 se lee “ocho, coma, trece”. Esta situación puede generar diversos errores, tanto en la comparación de números decimales como en su operatoria.

La lectura de las fracciones no decimales, no permite representar directamente el número en su notación decimal. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$ se lee “dos tercios”.

En este último caso, y de manera general, para determinar la representación decimal de cualquier fracción se divide el numerador por el denominador de la fracción siguiendo el algoritmo de la división. Por ejemplo, el número decimal asociado a $\frac{7}{3}$ se puede obtener de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} 7 : 3 = 2{,}333... \\ \underline{-\ 6} \\ \ \ 10 \\ \underline{-\ \ 9} \\ \ \ \ 10 \\ \ \underline{-\ \ 9} \\ \ \ \ \ 10 \\ \ \ \underline{-\ \ 9} \\ \ \ \ \ \ 1... \end{array}$$

TALLER: NÚMEROS DECIMALES.

Ubicación

Taller: Números decimales.
Actividad : Expresando distancias a la escuela en notación decimal.

5- Determinar la fracción de una expansión decimal periódica.

Un procedimiento para obtener la fracción asociada a una expansión decimal periódica consiste en:

Procedimiento Ejemplo

Procedimiento	Ejemplo
Representar la fracción que estamos buscando a través de una incógnita:	$x = 2,\overline{15}$
Multiplicar por la potencia de 10 que tenga igual cantidad de ceros que el número de cifras del período:	$100x = 215,\overline{15}$
Restar ambas expresiones:	$100x - x = 215,\overline{15} - 2,\overline{15}$ $99x = 213$
Despejar la incógnita:	$x = \frac{213}{99}$

Comentarios

En este procedimiento, elegir una potencia de 10 que tenga igual cantidad de ceros que el número de cifras del período, tiene el propósito de obtener una expresión decimal tal que en la resta con la original se cancelen los períodos y resulte una fracción.

Al escribir números decimales como fracciones se debe tener en cuenta que hay resultados que van en contra de la intuición, por ejemplo, que $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$. Una manera de justificar esto es:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0,\overline{3} + 0,\overline{3} + 0,\overline{3} = 0,333\ldots + 0,333\ldots + 0,333\ldots = 0,999\ldots = 0,\overline{9}$$

Es importante que el docente comprenda y maneje las justificaciones de las reglas para transformar números decimales a fracción, y que tenga en cuenta que no todos los números decimales se pueden escribir como fracción.

Ubicación

Taller: Números decimales.
Actividad : Expresando distancias a la escuela en notación decimal.

TALLER: NÚMEROS DECIMALES.

6- Estrategias para comparar números decimales.

Cuando se quieren ordenar números en notación fraccionaria o una combinación de ellos con números decimales se pueden utilizar diferentes estrategias, las que dependen de los números involucrados. Por ejemplo:

- Si resulta fácil expresar todos los números como fracciones con un mismo denominador, basta con comparar los numeradores.

- Si el proceso para igualar denominadores es complejo o engorroso, es más eficiente comparar los números expresándolos en su forma decimal.

En este último caso, una posible estrategia es comparar cifras que tienen igual valor posicional. Se comienza por la cifra de mayor valor posicional, es decir, de izquierda a derecha. Si todas las cifras son iguales, los números son iguales; pero si se encuentra una posición en que las cifras son diferentes, será mayor el número que tenga dicha cifra mayor.

Se debe hacer notar que hay ciertas situaciones en las que se tiene que tener precaución al aplicar esta estrategia:

- Al hacer comparaciones del tipo $0,\overline{9}$ con 1 o $2,24\overline{9}$ con 2,25, se debe usar la expresión finita del número periódico, es decir, para $0,\overline{9}$ usar 1 y para $2,24\overline{9}$ usar 2,25.

- Al comparar dos números que aparentan tener todas sus cifras iguales, por ejemplo, $0,\overline{8}$ y 0,8 o $1,\overline{23}$ y $1,2\overline{3}$, se deben considerar más cifras decimales. En el ejemplo anterior, los números se pueden escribir como $0,88\overline{8}$ y 0,800 o $1,23\overline{23}$ y $1,233\overline{3}$, y luego compararlos.

Comentarios

La estrategia que involucra los números decimales corresponde a una extensión de la estrategia para comparar números naturales. Comúnmente, es utilizada en la enseñanza escolar.

Algunos posibles errores al comparar números decimales:

- Afirmar que un número es mayor que otro solo por tener una mayor cantidad de cifras. Esta estrategia es válida en los naturales, pero no en los decimales.
- Separar un número decimal en dos partes, la que va “antes” de la coma y la que va “después” de ella, y considerar cada una como si fueran números naturales.

Es importante tener en cuenta que estos errores son parte del aprendizaje y, por tanto, el rol del docente es anticiparlos y planificar cómo abordarlos para ayudar a sus estudiantes a distinguir las características de los números decimales y la de los números naturales.

Ubicación

Taller: Números decimales.
Actividad : Ordenando números decimales.

7- En los números decimales no existe sucesor ni antecesor.

Entre dos números decimales siempre es posible encontrar otro decimal. Es por esto que en los números decimales no existen los conceptos de sucesor ni antecesor.

Una estrategia que permite encontrar números decimales entre otros dos dados es la siguiente:

Por ejemplo, dados 0,6 y 0,7.

- Se agrega un cero a la derecha de la última cifra decimal: 0,60 y 0,70.

- Se debe reconocer que:
0,60 < 0,61 < 0,62 < 0,63 < 0,64 < 0,65 < 0,66 < 0,67 < 0,68 < 0,69 < 0,70

Comentarios

A diferencia de lo que ocurre con los números decimales, en los números naturales no existe ningún número entre n y $n + 1$, por tanto en los números naturales sí es posible utilizar el concepto de sucesor y antecesor.

Ubicación

Taller: Números decimales.
Actividad : Ordenando números decimales.