SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

Analizando relaciones proporcionales y gráficos

APUNTES CURSO ANALIZANDO RELACIONES PROPORCIONALES Y GRÁFICOS

I.Razones, proporciones y porcentajes

1. Razones y proporciones

Las razones son una forma de comparar dos o más cantidades. En nuestra vida diaria, las razones están presentes en la descripción de una receta, al hablar de la velocidad de un vehículo o de su rendimiento, en las especificaciones del plano de un edificio, entre otras situaciones. .

1.1. Definición

Una *razón* es una *comparación* entre dos cantidades *A* y *B* que establece una relación entre ellas del tipo "por cada tantas unidades de *A*, hay tantas unidades de *B*".

Ejemplo:
Una buena limonada lleva 5 medidas de agua por cada 2 medidas de jugo de limón.

La notación que se emplea para denotar la razón entre dos cantidades p y q es $p : q$ y se lee "p es a q". Es importante tener en cuenta que si bien esta notación tradicional utiliza el símbolo de una división (" : "), el significado que se le atribuye a este símbolo, en el contexto de razones, es diferente. También debe tenerse en cuenta que en esta notación, el orden en que aparecen las cantidades es importante. Así, la frase "las cantidades *A* y *B* están en la razón $p : q$" quiere decir "por cada p unidades de *A* hay q unidades de *B*".

Ejemplos:
i) En una buena limonada, las cantidades de agua y limón deben estar en la razón 5 : 2.

ii) En una buena limonada, las cantidades de jugo de limón y agua deben estar en la razón 2 : 5.

Notamos que una razón no hace, necesariamente, referencia a los totales respectivos de cada una de las cantidades. Sin embargo, si el total de una de las dos cantidades es conocido, entonces la razón entre ellas determina unívocamente el total de la otra cantidad.

Ejemplo:
Queremos preparar una limonada usando 10 medidas de agua. ¿Cuántas medidas de limón se necesitan para que la limonada sea una "buena limonada"?
Para que nuestra limonada sea "buena", necesitamos que por cada 5 medidas de agua, se agreguen 2 medidas de limón. Así, si separamos las 10 medidas de agua en 2 grupos de 5 medidas cada uno,

y por cada uno de estos grupos agregamos 2 medidas de limón, estaremos respetando la razón de una “buena limonada”. Observamos que, en total, habremos usado 4 medidas de limón.
Si bien la razón 2 : 5 se respeta, las cantidades totales son 4 medidas de limón y 10 medidas de agua.

1.2 Razones iguales

En el ejemplo anterior, nuestra limonada fue preparada usando cantidades de limón y agua que están en la razón 4 : 10. Sin embargo, lo hicimos así para que fuera una “buena limonada” y, por lo tanto, estas cantidades también están en la razón 2 : 5. Es decir, las razones 4 : 10 y 2 : 5 son en realidad la misma razón.

Más generalmente, si multiplicamos cada una de las cantidades de una razón por un mismo número, entonces la razón *se conserva*. Matemáticamente esto se expresa diciendo que si *k* es un número natural distinto de 0, entonces la razón $p : q$ es igual a la razón $(k \cdot p) : (k \cdot q)$.

$$p : q = (k \cdot p) : (k \cdot q)$$

Esta igualdad también la podemos leer de manera inversa, es decir, (k · p) : (k · q) es igual a p : q. Así, hemos dividido por k los términos (cantidades relacionadas) de la primera razón obteniendo una razón igual. En general, si ambos términos en una razón tienen un factor en común, al dividirlos por dicho factor se obtiene una razón igual a la original, es decir:

$$(p : k) : (q : p) = p : q$$

Ejemplo:

i) $2 : 5 = 4 : 10 = 6 : 15 = 8 : 20 = 10 : 25 = \ldots$

ii) $2{,}3 : \pi = 4{,}6 : 2\pi = 1{,}15 : \frac{\pi}{2} \ldots$

iii) $\frac{3}{4} : 7 = \frac{9}{4} : 21 = \frac{15}{4} : 35 = \ldots$

1.3 Valor de la razón

Cuando una razón p : q puede expresarse con dos números enteros (distintos de cero), se le puede asociar el valor $\frac{p}{q}$, que corresponde a la parte o fracción que representa *p* de la otra cantidad, *q*. Es decir, *p* es $\frac{p}{q}$ de *q*. Esta fracción se conoce como valor de la razón y depende solo de dicha razón y no de los valores de las cantidades, pues si se toma otra razón igual (por ejemplo, multiplicando o dividiendo ambas cantidades por el mismo número), esta fracción no cambia.

Ejemplo:
El valor de la razón 2 : 5 es $\frac{2}{5}$.

Notamos que 2 es, en efecto, $\frac{2}{5}$ de 5. Esta forma de interpretar el valor de la razón como un "operador" que relaciona la primera cantidad con la segunda, resulta muy útil cuando queremos encontrar una de las cantidades que se requiere para conservar la razón, dado que la otra cantidad es conocida.

Ejemplo:
Para que las cantidades de limón y agua en una limonada estén en razón 2 : 5, sabiendo que lleva 10 medidas de agua, debemos usar 4 ($\frac{2}{5}$ de 10) medidas de limón.

Ejemplo:
¿Cuántos litros de limón se necesitan para mezclar con 1 litro de agua, y mantener la razón de 2 : 5? Queremos que la cantidad de limón sea $\frac{2}{5}$ de la cantidad de agua. Es decir, $\frac{2}{5}$ de litro.

Así, una forma equivalente de interpretar el valor de una razón es:

"El valor de la razón es el valor que debe tener la primera cantidad cuando tenemos 1 unidad de la segunda."

Cuando una razón a : b no se puede expresar con números enteros positivos, no se le puede asociar una fracción. En este caso, el número que se le asocia es el resultado de la división a dividido b y, como las cantidades no se pueden medir ambas como valores naturales respecto a alguna unidad, se llaman inconmensurables. De manera análoga con el caso conmensurable, el número asociado solo depende de la razón, es decir, no cambia si las cantidades varían manteniéndose en la misma razón. Sabemos que en el caso de fracciones, $\frac{a}{b}$ = a ÷ b, entonces podemos definir *el valor de la razón* como el cociente entre ambas cantidades sean ellas *conmensurables* o no. En cualquier caso usamos la misma notación para referirnos al valor de la razón.

1.4 Razones con unidades de medida

Hasta ahora hemos usado razones para comparar cantidades de la misma naturaleza y medidas en la misma unidad. Sin embargo, una razón también puede expresar la relación entre cantidades de *diferente naturaleza*. En el siguiente ejemplo se establece una razón entre *distancia y volumen*:
Como sabemos que en el caso de fracciones, $\frac{a}{b}$ = a ÷ b, entonces podemos afirmar que, en general, el valor de la razón es el cociente entre ambas cantidades sean ellas conmensurables o no.

Ejemplo:
Mi auto híbrido recorre 30 km por cada litro de combustible que consume.

En casos como este, al momento de escribir la razón, es importante indicar las unidades de medida que le corresponden a cada una de las cantidades.

Ejemplo:
La distancia que recorre mi auto híbrido y el combustible que consume están en la razón (30 km) : (1 litro).

Es común referirse a la razón anterior con la frase: "30 km por litro", lo que en realidad significa 30 km por cada litro y que típicamente denotamos "30 km/L". Notar que los números que expresan la razón van a variar si cambiamos las unidades. Por ejemplo, 30 km/L es equivalente a 30000 m/L.

1.5. Razón entre más de dos cantidades

El concepto de razón puede aplicarse también a situaciones en que queremos comparar más de dos cantidades. Por ejemplo, si tenemos 3 cantidades A, B y C, podemos ligarlas estableciendo una razón del tipo:

"Por cada p unidades de A, hay q unidades de B, y r unidades de C".

Como es natural, para escribir esta razón usamos la notación "$p : q : r$", que se lee "p es a q es a r ".

Ejemplo:
La mezcla para un concreto resistente lleva, por cada parte de cemento, 2 partes de arena y 6 partes de ripio. Es decir, las cantidades de cemento, arena y ripio están en la razón 1 : 2 : 6.

Todos los conceptos tratados en los puntos anteriores pueden ser aplicados en este caso. Notamos que una razón "triple" ($p : q : r$) está determinada por dos razones "dobles" ($p : q$ y $q : r$), las que definen una tercera razón (p : r).

1.6. Proporción y propiedad fundamental de las proporciones

En la vida cotidiana aparecen situaciones, por ejemplo la preparación de una limonada, que se pueden describir a través de cantidades variables que caracterizan las propiedades que nos interesan de ellas. Al imponer que los distintos valores que tomen estas cantidades estén siempre en una misma razón estamos imponiendo una condición a la situación que representan. Por ejemplo, si preparamos una buena limonada, al fijar la razón entre dos cantidades (2 : 5), podemos garantizar que la situación descrita (preparación de una limonada) conserva una propiedad específica que nos interesa (que la limonada sea "buena"). Así, una limonada preparada en la razón 6 : 15 es una buena limonada porque 6 : 15 es igual a 2 : 5. A una igualdad entre dos razones se le denomina proporción.

Una propiedad intuitiva que exhiben las proporciones se refleja en el siguiente ejemplo: Si juntamos 1 litro de buena limonada con 2 litros de buena limonada obtenemos 3 litros de buena limonada. Esto se expresa de manera general como:

$$Si\ \ a : b = c : d, \text{ entonces } (a + c) : (b + d) = a : b = c : d.$$

Una propiedad menos intuitiva, pero extremadamente útil, es la siguiente:

$$Si\ \ a : b = c : d, \text{ entonces se cumple que } a \cdot d = c \cdot b.$$

Para convencernos de la validez de esta *propiedad fundamental* de las proporciones podemos usar la siguiente propiedad de las razones vistas anteriormente:

$$a : b = (k \cdot a) : (k \cdot b) \ \ y \ \ c : d = (r \cdot c) : (r \cdot d) \qquad\qquad (*)$$

Con valores de k convenientes. En efecto, usando k=d en la primera razón (a : b) y k=b en la segunda (c : d) obtenemos:

$$d \cdot a : d \cdot b = a : b = c : d = b \cdot c : b \cdot d, \text{ es decir, } \ d \cdot a : d \cdot b = b \cdot c : b \cdot d$$

Como d · b es igual a b · d, se debe tener que d · a = b·c o, lo que es lo mismo, a · d = c · b.

Ejemplo:
Si la razón entre los litros de limón y agua de una buena limonada es 2 : 5, ¿cuántos litros de limón debemos usar si nuestra mezcla lleva 2,5 litros de agua? Para responder a esta pregunta, planteamos la proporción:

$x : 2{,}5 = 2 : 5$ donde x representa los litros de limón que necesitamos.

Ahora, por la propiedad fundamental de las proporciones, se tiene que:

$x \cdot 5 = 2{,}5 \cdot 2$
$5 \cdot x = 5$, es decir $x = 1$, por lo que se requiere 1 litro de jugo de limón.

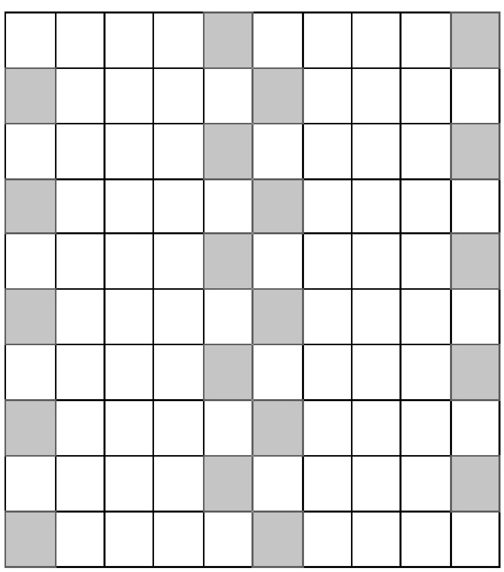
2. Porcentajes

Los porcentajes son una forma común de establecer el tamaño relativo de una cantidad respecto a la otra. Frecuentemente se utilizan para transmitir información en los medios de comunicación, para atraer clientes en las promociones que realizan las tiendas, para mostrar resultados de encuestas, en operaciones bancarias, entre otros.

2.1. Porcentajes

Los porcentajes son una forma estandarizada de expresar comparaciones del tipo "por cada 100 partes, x de ellas tienen cierta característica", lo que equivale a decir que el x% del total o $\frac{x}{100}$ del total tiene esa característica. Cuando decimos "por ciento" estamos diciendo "por cada 100". Por convención se utiliza el 100 como denominador, dada nuetra familiaridad con las potencias de 10; sin embargo, se podría haber utilizado cualquier otro número.

Ejemplo:
En la siguiente cuadrícula de 10x10, hay 20 cuadrados grises y 80 cuadrados blancos



Por cada 100 cuadrados hay 20 cuadrados grises, por lo tanto, la cantidad de cuadrados grises corresponde al 20% de la cuadrícula.

También podemos decir que la cantidad de cuadrados grises es $\frac{20}{100}$ de la cantidad total de cuadrados de la cuadrícula, o podemos utilizar cualquier fracción igual a ella para expresar esto. Por ejemplo, la cantidad de cuadrados grises es $\frac{10}{50}$, $\frac{5}{25}$ o $\frac{1}{5}$ de la cantidad total de cuadrados de la cuadrícula.

Al igual que las fracciones, los porcentajes se pueden interpretar como operadores sobre otras cantidades. Cuando nos referimos al 15% de algo, podemos interpretar que dividimos ese algo en 100 partes iguales y nos quedamos con 15 de esas partes.

Ejemplo

Porcentaje del total	*Fracción del total*
100%	1
75%	$\frac{3}{4}$
50%	$\frac{1}{2}$
25%	$\frac{1}{4}$
10%	$\frac{1}{10}$
1%	$\frac{1}{100}$

Notamos que una cantidad representa el 100% de ella misma, es decir, la unidad o el todo. Por ejemplo, el 100% de la cantidad de cuadrados de la cuadrícula es justamente el total de cuadrados que hay en dicha cuadrícula.
Al trabajar con porcentajes es muy importante tener claro qué estamos considerando como la "unidad" o el "todo".

Ejemplo 1
Cuando decimos que el 20% de la cuadrícula corresponde a cuadrados grises, el "todo" es la cantidad total de cuadrados que hay en dicha cuadrícula.

Ejemplo 2
Si miramos las filas de la cuadrícula, observamos que cada 4 cuadrados blancos hay 1 gris. Esto es equivalente a decir que cada 100 cuadrados blancos hay 25 grises y, por lo tanto, la cantidad de cuadrados grises es el 25% de la cantidad de cuadrados blancos. En este caso, el "todo" es la cantidad de cuadrados blancos que hay en la cuadrícula.

En el ejemplo 2, se ha expresado la razón 1:4 como 25:100 para así poder expresar la comparación en términos de porcentajes. Esto es posible dado que una razón que expresa una comparación entre una "parte" y un "todo" siempre es igual a una de la forma x:100, siendo x el porcentaje de esa parte respecto al todo.

2.2. Cálculo de porcentajes

Hay muchas maneras de calcular porcentajes, las cuales involucran distintas propiedades e interpretaciones de éstos. A continuación presentamos tres maneras de calcular porcentajes.

Estrategias de cálculo mental

Hay distintas estrategias de cálculo mental que se pueden usar para calcular porcentajes. Por ejemplo, se pueden calcular primero porcentajes conocidos y divisores de 100 (1%, 10%, 25% y 50%) y luego sumar, restar y/o multiplicar dichos valores por un número, para encontrar el valor buscado.

Ejemplos
30% de 2500 El 10% corresponde a la décima parte de 2500, o sea, 250. El 30% es el triple de 250, por lo que obtenemos que el 30% de 2500 es 750.
51% de 2500 El 50% es la mitad de 2500, o sea, 1250. El 1% es 25 porque es la centésima parte de 2500. Luego, al sumar, se obtiene que el 51% de 2500 es 1275.
99% de 2500 Podemos restarle el 1% al 100%: 2500 – 25 = 2475

Utilización de la propiedad fundamental de las proporciones

Calcular el 8% de 3400 es encontrar qué número es a 3400 como 8 es a 100. Queda planteada una proporción con un valor desconocido:

$$8 : 100 = x : 3400$$
$$100 \cdot x = 8 \cdot 3400$$
$$x = (8 \cdot 3400) : 100$$
$$x = 27200 : 100$$
$$x = 272$$

En la tercera ecuación de los pasos anteriores queda expresado lo que plantea la regla popularmente conocida como "regla de tres". Esta regla es en definitiva una forma rápida de aplicar la propiedad fundamental de las proporciones.

Porcentaje como operador

Calcular el 8% de 3400 es calcular la $\frac{8}{100}$ parte de 3400. Esto corresponde a:

$$8\% \text{ de } 3400 = \frac{8}{100} \cdot 3400 = 8 \cdot 34 = 272$$

Notemos que las expresiones resaltadas en gris son iguales. Por lo tanto, calcular el x% de una cantidad estableciendo una proporción y utilizando la propiedad fundamental de las proporciones es equivalente a utilizar la fracción o cociente $\frac{x}{100}$ como operador. Así, el x% de una cantidad A es $\frac{x}{100} \cdot$ A.

Hablamos de "fracción o cociente $\frac{x}{100}$" porque x no es siempre un número natural. Por ejemplo, si consideramos el 34,7% de A, la fracción o cociente que multiplica a *A* es:

$$\frac{34{,}7}{100} = \frac{\frac{34{,}7}{10}}{100} = \frac{347}{1000}$$

2.3. Tipos básicos de problemas

En las situaciones problemáticas que involucran porcentajes hay tres números involucrados además del 100:

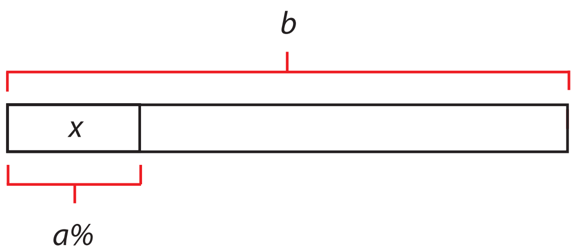
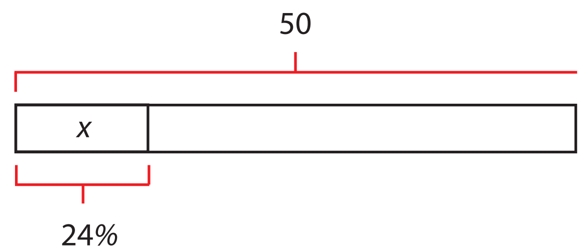
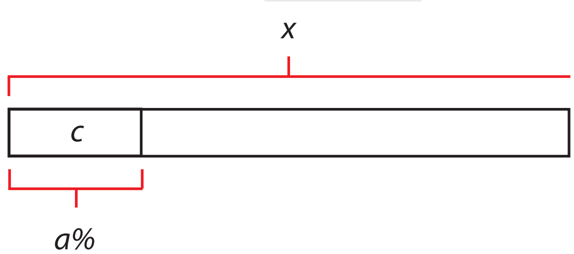
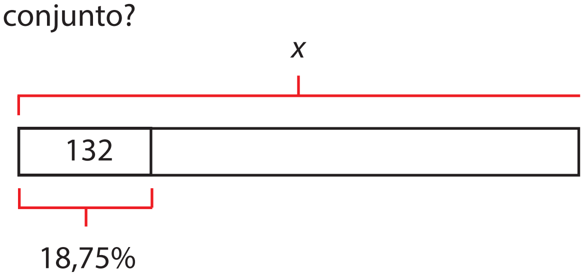
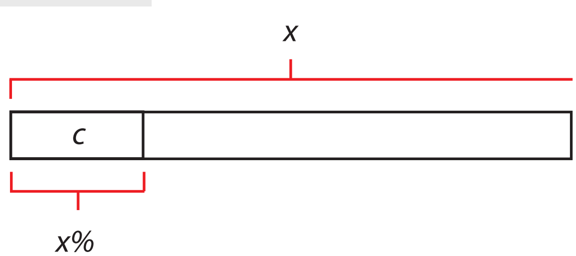
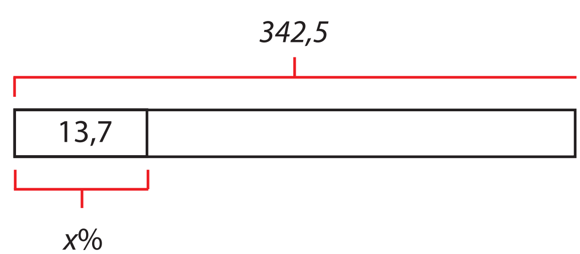
Porcentaje a aplicar

Resultado de aplicar el porcentaje

a% de b = c

Cantidad a la que se le aplica el porcentaje

Por lo tanto, según cuál de esos números sea el valor desconocido, surgen tres tipos básicos de problemas que involucran porcentajes y una incógnita. A continuación presentaremos un ejemplo de cada caso y usaremos diagramas de barras para plantear y resolver este tipo de problemas.

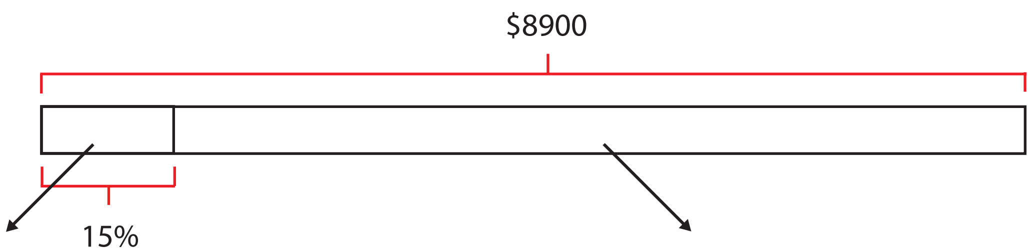
Situación	Ejemplo
La incógnita x es el resultado de aplicar un porcentaje: $a\%$ de $b = x$  $a\%\ de\ b = \frac{a}{100} \cdot b = x$	¿Cúanto es el 24%  $24\%\ de\ 50 = \frac{24}{100} \cdot 50 = \frac{12}{50} \cdot 50 = 12$
La incógnita x es la cantidad a la que se le aplica el porcentaje: $a\%$ de $x = c$  $\frac{a}{100} = \frac{c}{x}$ $a \cdot x = c \cdot 100$ $x = c \cdot 100 : a$	El 18,75% de un conjunto de elementos es 132. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto?  $\frac{18,75}{100} = \frac{132}{x}$ $18,75 \cdot x = 132 \cdot 100$ $x = 13200 : 18,75$ $x = 704$
La incógnita x es el porcentaje a aplicar: $x\%$ de $b = c$  $\frac{c}{b} = \frac{x}{100}$ $b \cdot x = c \cdot 100$ $x = c \cdot 100 : b$	¿Qué porcentaje representa 13,7 de 342,5?  $\frac{13,7}{342,5} = \frac{x}{100}$ $342,5 \cdot x = 132 \cdot 100$ $x = 1370 : 342,5$ $x = 4$

2.4. Descuentos y aumentos

Una de las aplicaciones más frecuentes del porcentaje se relaciona con descuentos y aumentos en distintas situaciones.

Descuentos

Si en un comercio hacen un 15% de descuento en prendas de la temporada anterior y compramos una polera de la temporada pasada de \$8900, podemos determinar que ahorramos \$1335 calculando el 15% de 8900. En realidad lo que más nos puede interesar es determinar cuánto pagaremos por la polera. Dos alternativas para responder esto son las siguientes:



Alternativa 1
Calcular el 15% de 8900 y luego restarle el valor obtenido a 8900.

Alternativa 2
Identificar que finalmente estamos pagando el 85% del precio de la polera y por lo tanto calcular directamente el valor de la polera con el descuento haciendo el 85% de 8900.

Dependiendo del valor que se pretenda obtener al realizar un descuento del *x*% a una cantidad *A*, muchas veces puede ser más directo calcular el porcentaje restante de dicha cantidad, es decir, calcular el (100-x)% de A, como se plantea en la alternativa 2. Haciendo los cálculos correspondientes, en forma general, tenemos que:

$$\text{A} - \text{x\% de A} = \text{A} - \frac{x}{100} \cdot A = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot A$$

En conclusión, disminuir una cantidad *A* en un *x*% corresponde a multiplicarla por $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$. En nuestro ejemplo, el precio que se paga por la polera con descuento es:

$$(1 - 0{,}15) \cdot 8900 = 0{,}85 \cdot 8900 = 7565$$

Aumentos

Muchas veces nos encontramos en situaciones en que hay que determinar el valor que se obtiene al aumentar una cantidad A en un x%. Esto se tiene mediante la siguiente expresión:

$$A + x\% \text{ de } A = A + \frac{x}{100} \cdot A = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot A$$

Por lo tanto, aumentar una cantidad A en un x% corresponde a multiplicarla por $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$.

Ejemplo:

Si a un artículo de $18500 le recargamos un 7%, el valor final del mismo será 1,07·18500=19795 pesos. Si solo queremos saber cuánto es el recargo, calculamos 0,07·18500=1295.

2.5. Propiedades útiles

Al considerar x% como $\frac{x}{100}$, podemos establecer propiedades para los porcentajes a partir de las propiedades de las operaciones de los números.

Propiedad de las operaciones	**Propiedad de los porcentajes**
Propiedad conmutativa de la multiplicación	*El a% de b es igual al b% de a* $a\% \text{ de } b = \frac{a}{100} \cdot b = \frac{a \cdot \text{b}}{100} = \frac{\text{b} \cdot a}{100} = \frac{\text{b}}{100} \cdot a = b\% \text{ de } a$
	El orden en que se aplica un a% de descuento y un b% de aumento a un valor V no afecta el valor final $\underbrace{\left(1 - \frac{a}{100}\right)}_{\text{descuento}} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{b}{100}\right)}_{\text{aumento}} \cdot V = \left(1 + \frac{b}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{100}\right) \cdot V =$
	Calcular el a% del b% de una cantidad c es equivalente a calcular el b% del a% de la misma cantidad c $a\% \text{ de } b\% \text{ de c} = \frac{a}{100} \cdot \frac{\text{b}}{100} \cdot c = \frac{\text{b}}{100} \cdot \frac{a}{100} \cdot c = b\% \text{ de } a\% \text{ de } c.$

Propiedad de las operaciones de los números	Propiedad de los porcentajes
Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma	*El porcentaje se distribuye respecto a la suma* $a\%$ de $(b + \mathrm{c}) = \frac{a}{100} \cdot (b + c) = \frac{a}{100} \cdot b + \frac{a}{100} \cdot c = a\%\ de\ b + a\%\ de\ c$ $a\%\ de\ (b + a) = a\%\ de\ b + a\%\ de\ c$

II. Poporcionalidad directa e inversa

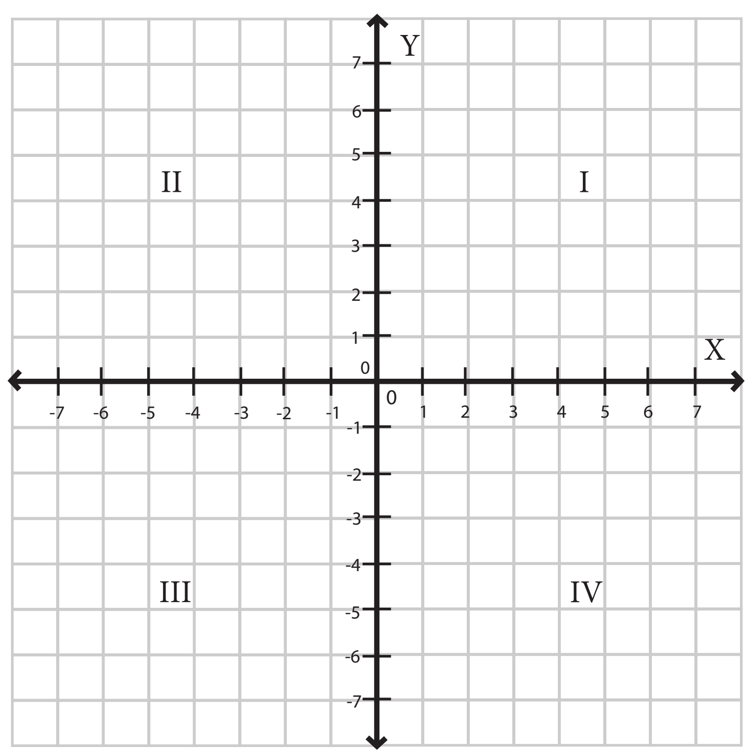
1. Plano cartesiano

Comenzaremos realizando un breve recuerdo de plano cartesiano, coordenadas cartesianas y la representación de estas en el plano. El motivo de esta sección del documento, es disponer de conocimientos que son necesarios para la comprensión de proporcionalidad directa e inversa, específicamente, la representación gráfica de estas relaciones.

1.1. Definición

Dadas dos variables relacionadas, podemos visualizar gráficamente la relación entre ellas. Para ello haremos uso de un sistema de referencia generado por dos rectas perpendiculares graduadas numéricamente de manera tal que, el cero de ambas está en su punto de intersección. Llamamos a estas rectas ejes *coordenados* o, simplemente, *ejes* y a su intersección la denominamos *origen* (O).

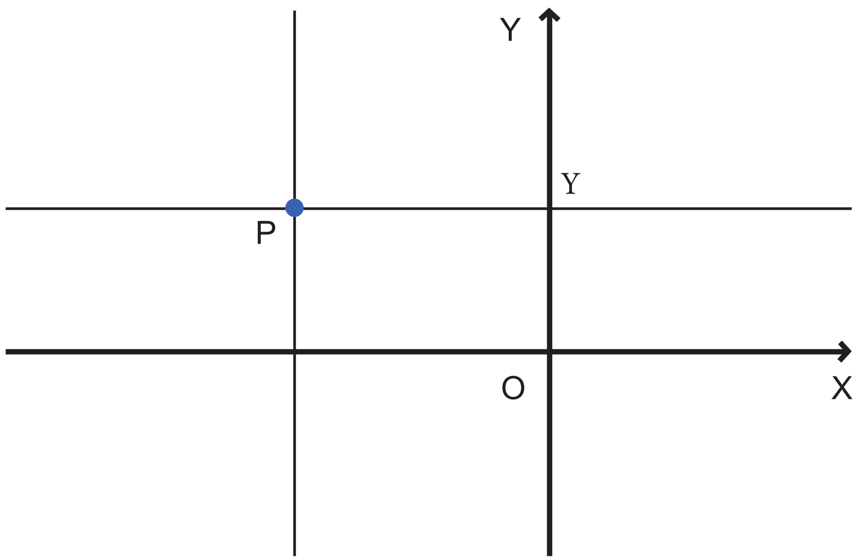
Usualmente se sitúa uno de los ejes de forma horizontal y lo denotamos como eje X, y al eje vertical lo denotamos como eje Y. En ambos ejes se elige una unidad de medida, transformando cada eje en una recta numérica. El plano con este sistema de referencia se denomina *plano cartesiano* o *plano coordenado* y se muestra en la siguiente figura:



El plano queda dividido en cuatro regiones, denominadas cuadrantes y marcadas en sentido contrario a las agujas del reloj con los números I, II, III y IV.

1.2. Cómo graficar en el plano cartesiano

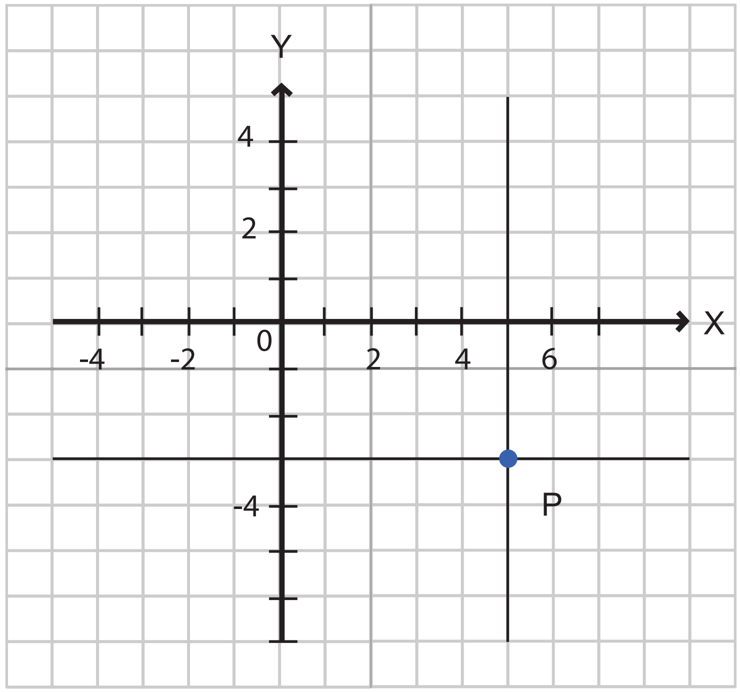
Para identificar un punto P en el plano cartesiano, trazamos rectas paralelas a los ejes X e Y que pasen por P.



Al valor *x* de la intersección entre el eje X y la recta paralela al eje Y que pasa por P, lo denominamos *abscisa* del punto P. De manera similar, al valor *y* de la intersección entre el eje Y y la recta paralela al eje X que pasa por P, lo llamaremos *ordenada*.

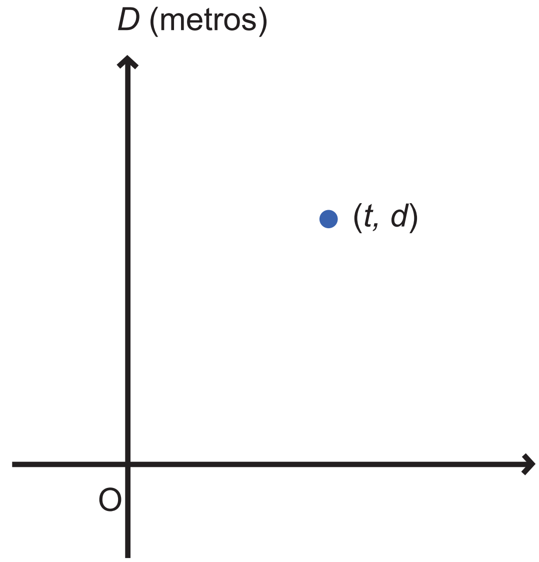
Finalmente, identificamos el punto P como un par ordenado entre la abscisa y la ordenada correspondiente: (x, y). La notación $P(x, y)$ establece que las coordenadas del punto P son (x, y). Mediante este procedimiento podemos asignar a cualquier punto del plano un único par de números (x, y). De manera recíproca, para cada par de números (x, y) ubicamos un único punto en el plano.

Ejemplo:
Las coordenadas de P en el siguiente plano cartesiano corresponden al par (5, -3), es decir, P(5, -3).



Cuando las variables que se desean graficar surgen de una situación en que se emplean otras letras para identificar las variables, ya que son más pertinentes para el contexto descrito, es conveniente que los ejes se rotulen con aquellas letras.

Ejemplo:
Si las variables en una situación son tiempo T en horas y distancia recorrida D en metros, entonces los puntos en el plano cartesiano tendrán coordenadas (t , d) o (d, t) según qué variable está representada en cada eje. En el gráfico que se muestra a continuación la variable tiempo (T) se representa en el eje horizontal, mientras que la variable distancia recorrida (D) se representa en el eje vertical.



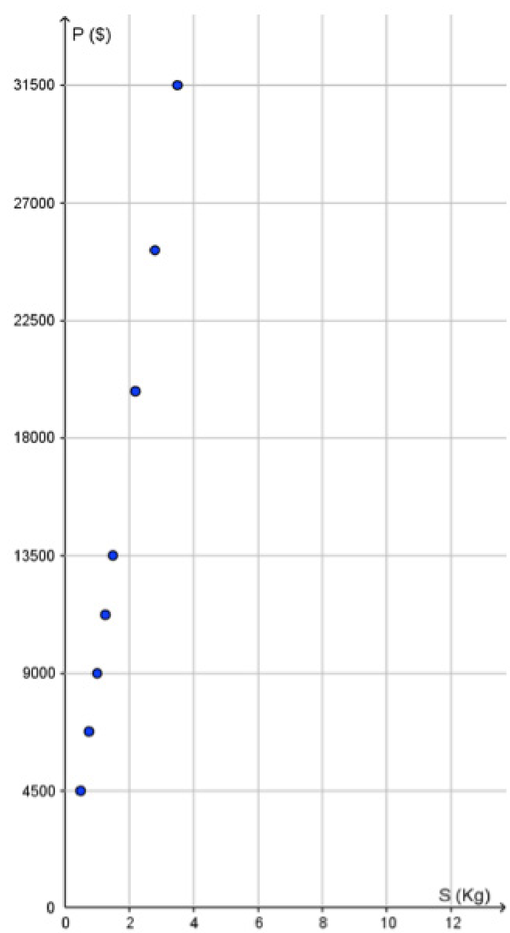
Una relación entre dos variables, descrita a través de una tabla de datos, se puede representar gráficamente asignando una variable a cada eje y con ello, cada par de valores en la tabla, corresponde a las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

Ejemplo:
Sea S la cantidad de salmón (en kg) y P el precio (en pesos) a pagar por S. Supongamos que queremos graficar la relación entre estas variables a partir de la siguiente tabla:

S **(kg)**	***P*** **(pesos)**
0,5	4.500
0,75	6.750
1	9.000
1,25	11.250
1,5	13.500
2,2	19.800
2,8	25.200
3,5	31.500

Escribamos las coordenadas de los puntos correspondientes a cada par de valores (fila) en la tabla:

S (kg)	*P* (pesos)	(*S, P*)
0,5	4.500	(0,5; 4.500)
0,75	6.750	(0,75; 6.750)
1	9.000	(1; 9.000)
1,25	11.250	(1,25; 11.250)
1,5	13.500	(1,5; 13.500)
2,2	19.800	(2,2; 19.800)
2,8	25.200	(2,8; 25.200)
3,5	31.500	(3,5; 31.500)



Notemos que las abscisas y las ordenadas de todos los puntos (S, P) son positivas, ya que representan el valor a pagar y la cantidad de kg de salmón, y por tanto hemos utilizado solo el cuadrante I para hacer la gráfica.

2. Proporcionalidad directa

Existen diferentes situaciones en nuestra vida cotidiana en las que dos variables se relacionan entre sí. Por ejemplo, la cantidad de gasolina y la distancia que recorre un auto, el número de invitados y la cantidad de comida necesaria, la cantidad de objetos y el peso de ellos, entre otras. Un tipo de relación es aquella en que al aumentar o disminuir una de las variables, la otra aumenta o disminuye en la misma razón, respectivamente. En este caso, diremos que las variables son directamente proporcionales.

2.1. Variables directamente proporcionales

Dos variables x e y son directamente proporcionales cuando el cociente entre los valores que adquieren estas variables se mantiene constante. Este cociente entre las variables que se mantiene constante, se denomina *constante de proporcionalidad*.

$$\frac{y}{x} = k, \text{ donde k es la constante de proporcionalidad}$$

De la fórmula anterior se deduce que $y = k \cdot x$.

Observamos que cuando las variables toman valores positivos y son directamente proporcionales, entonces, al aumentar una aumenta la otra o al disminuir una disminuye la otra y, se mantiene la razón. Para simplificar el análisis y, debido a que en muchos problemas las variables estudiadas toman valores positivos, de aquí en adelante consideraremos que las variables involucradas son siempre positivas.

Ejemplo:
Consideremos la siguiente lista de precios de un determinado producto:

Cantidad de unidades del producto	Precio ($)
1	50
2	100
3	150
4	200

En la tabla podemos observar que al duplicar la cantidad de unidades del producto, también lo hace el precio a pagar:

	Cantidad de unidades del producto	Precio ($)	
$\cdot 2$	1	50	$\cdot 2$
	2	100	

Lo mismo ocurre con el resto de las filas, si se triplica la primera fila se obtienen los valores de la tercera, si se cuadriplica la primera fila se obtiene la cuarta, etc. Luego, al calcular el cociente entre las variables cantidad de unidades del producto y precio, se tiene que el cociente es constante por lo que son directamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 50 que representa el precio unitario de un producto.

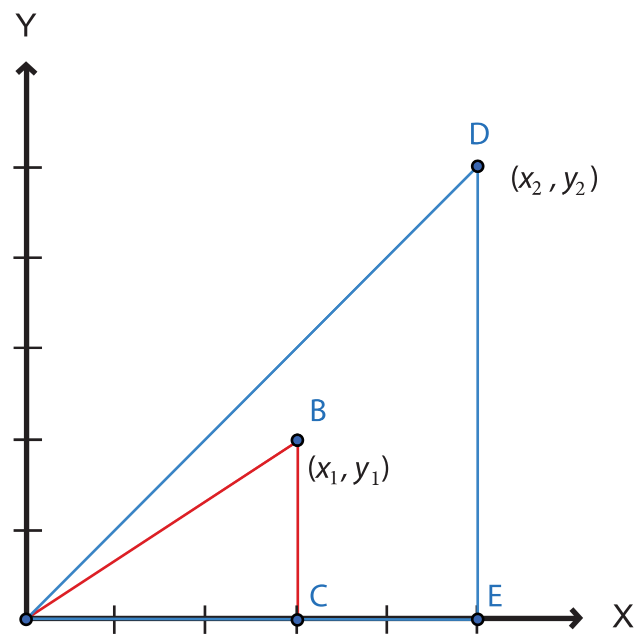
$$\frac{\textit{Precio}}{\textit{cantidad}} = \frac{50}{1} = \frac{100}{2} = \frac{150}{3} \ldots = 50$$

2.2. Representación gráfica de variables directamente proporcionales

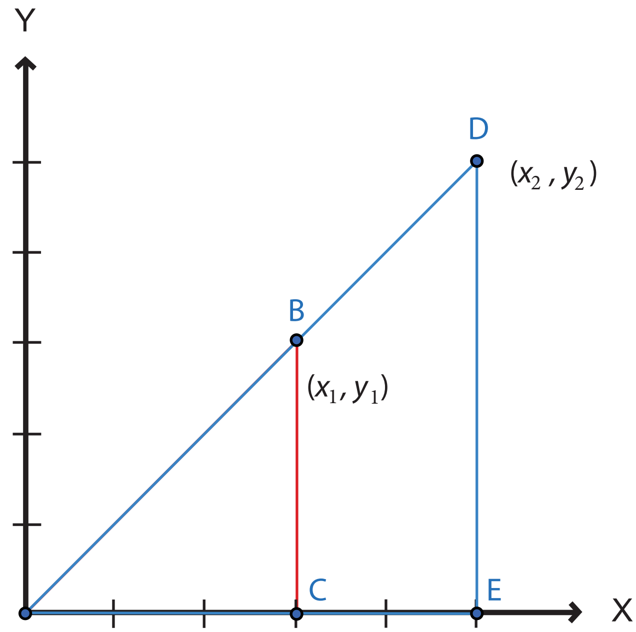
Veremos que el gráfico de una relación de proporcionalidad directa es una línea recta que pasa por el origen.

Dadas dos variables *x* e *y* que son directamente proporcionales, llamemos y_1 al valor de *y* cuando *x* toma el valor x_1 e y_2 al valor de y cuando *x* toma el valor x_2. Mostraremos que cuando graficamos estos dos puntos, estos quedan alineados con el origen del plano cartesiano.

Para demostrar esto, grafiquemos los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en algún lugar del plano coordenado sin suponer que estos puntos son colineales con el origen:



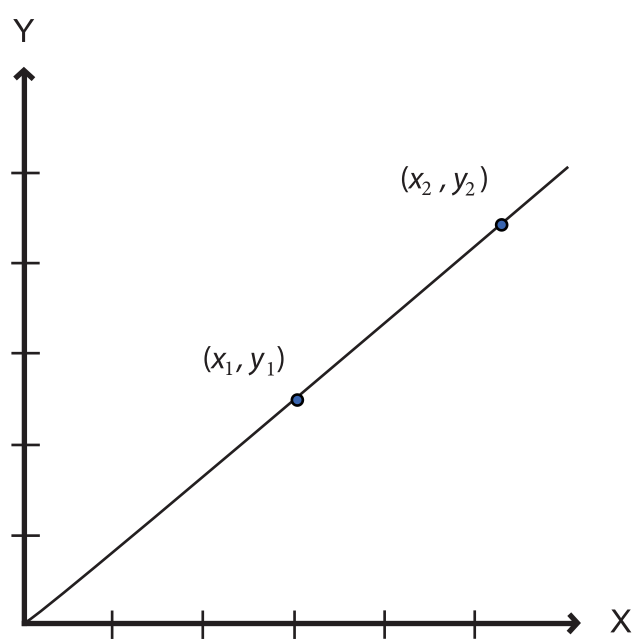
Como las variables son directamente proporcionales se cumple que $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ .Además, en los triángulos $\triangle ACB$ y $\triangle AED$, los lados de longitudes y_1 e y_2 son perpendiculares a los de longitudes x_1 y x_2, respectivamente, dado que son paralelos a los ejes de coordenadas, por lo que los triángulos $\triangle ACB$ y $\triangle AED$ son rectángulos en C y E respectivamente. Por criterio de semejanza de triángulos, se tiene que ambos triángulos son semejantes, luego, la imagen anterior es de la forma:



Entonces, podemos ver que *dos variables directamente proporcionales se representan gráficamente a través de un conjunto de puntos que están dentro de una recta que pasa por el origen del plano cartesiano*. Como la variable x toma todos los valores positivos, entonces el gráfico corresponde a una semirrecta con origen en el punto (0 , 0).

¿Será esto recíproco? Es decir, si se tienen dos variables y la relación entre ellas se representa por un conjunto de puntos que están dentro de una recta que pasa por el origen, ¿serán estas variables directamente proporcionales?

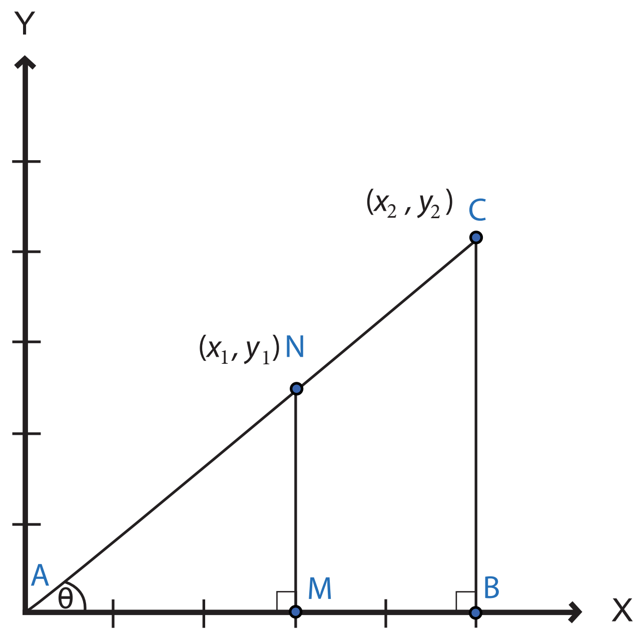
Consideremos dos variables *x* e *y* para las cuales se satisface lo anterior, como muestra la siguiente figura:



Para demostrar que las variables x e y son directamente proporcionales, basta demostrar que para cualquier par de puntos (x_1 , y_2) y (x_1 , y_2) del gráfico el cociente entre las coordenadas de cada punto se mantiene constante, es decir:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Veamos que en el gráfico se forman los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AMN$:



Como los lados $\overline{BC}$ y $\overline{MN}$ son perpendiculares a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AM}$, dado que son paralelos a los ejes de coordenadas, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AMN$ son rectángulos en B y M, respectivamente. Además, estos triángulos comparten el ángulo $\measuredangle CAB = \theta$. Y, como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º, se cumple que los ángulos $\measuredangle ANM$ y $\measuredangle ACB$ son congruentes. Según esto, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AMN$ tienen ángulos interiores congruentes y, por lo tanto, son triángulos semejantes. De lo cual obtenemos que:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

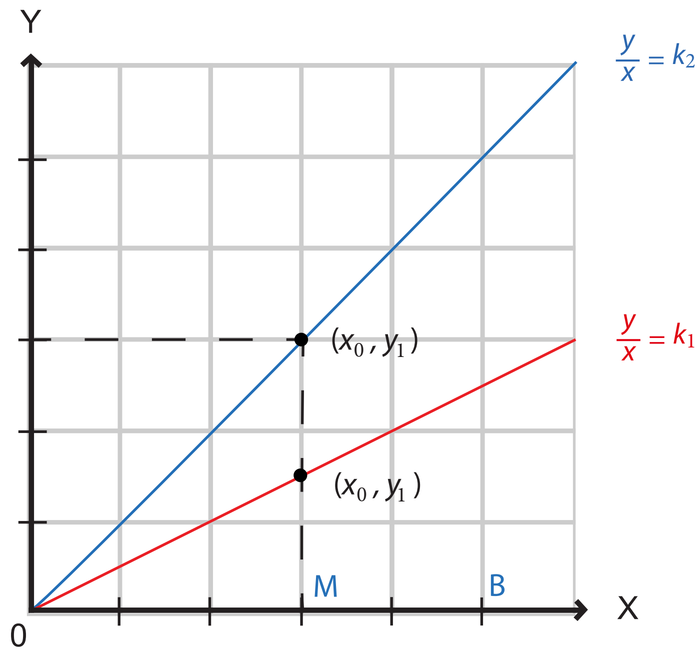
Como $\mathrm{AM} = x_1$, $MN = y_1$, $AB = x_2$ y $BC = y_2$, se obtiene que:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Por lo tanto, *dos variables que se representan por un conjunto de puntos dentro de una recta que pasa por el origen del plano cartesiano, son directamente proporcionales.*

Por comodidad diremos que las variables directamente proporcionales se representan por una recta que pasa por el origen, aun en el caso que solo sea un subconjunto de ella.

En la siguiente imagen observamos qué rol juega la constante de proporcionalidad en el gráfico de variables directamente proporcionales. Para esto consideramos variables directamente proporcionales con distintas constantes de proporcionalidad, $k_1 < k_2$.



Veamos que, en la recta de color rojo a la abscisa x_0 le corresponde la ordenada y_1 , mientras que en la recta azul a la misma abscisa x_0 le corresponde la ordenada y_2 y que, además, y_1 es menor que y_2 . Por lo tanto, podemos decir que la recta azul tiene una inclinación mayor que la recta roja.

Notemos que lo anterior está relacionado con la constante de proporcionalidad asociada a la recta roja y azul, que podemos escribir de la forma k_1=y_1/x_0 y k_2=y_2/x_0 , respectivamente. Como y1 e y2 están divididos por el mismo valor x_0 y, además, y_1 es menor que y_2, se tiene que k1 es menor que k2. Así, mientras mayor sea la constante de proporcionalidad, mayor será la inclinación de la recta. Por lo tanto, para determinar qué recta está más inclinada, podemos comparar sus constantes de proporcionalidad.

2.3. Estudio de variables directamente proporcionales

Para estudiar si dos variables x e y son directamente proporcionales, se pueden usar al menos dos estrategias. Las cuales se detallan a continuación.

Una manera de analizar si estas variables son directamente proporcionales, es tabular algunos valores que toman las variables y demostrar que el cociente entre dichos valores siempre se mantiene constante. Es importante notar que basta que un cociente sea distinto a los otros para asegurar que no son directamente proporcionales. Pero, para afirmar que estas variables son directamente proporcionales, no basta necesariamente que para los datos de la tabla el cociente se mantenga constante, será necesario verificar que esto ocurre de manera general para cualquier par de valores que tomen dichas variables.

Para comprobar de modo general que dos variables son directamente proporcionales, muchas veces es necesario usar conocimientos adicionales que se pueden traducir en fórmulas, como por ejemplo, para demostrar que el cociente entre el perímetro y el lado de un cuadrado es constante (Ver actividad 3 del "Taller de Proporcionalidad Directa").

Otra estrategia para analizar si dos variables son directamente proporcionales es tabular algunos valores de las variables y luego, mirar el gráfico de estos puntos. Si la recta que pasa por el origen y uno de los puntos no contiene a alguno de los demás puntos, entonces las variables no son directamente proporcionales. Sin embargo, al igual que mencionamos anteriormente, es importante considerar que, para el caso que al trazar una recta que pasa por el origen, esta resulta contener a todos los puntos tabulados, pero estos no corresponden a todos los valores que pueden tomar las variables, solo podremos afirmar que las variables son directamente proporcionales si se puede mostrar, de manera general, que dicha recta contendrá a todos los puntos (*x,y*) definidos por estas variables, y no solo a los tabulados.

3. Proporcionalidad Inversa

Un tipo de relación entre dos variables es la proporcionalidad inversa, que se caracteriza porque al aumentar una variable en una razón, la otra disminuye en la misma razón, y viceversa.

3.1 Variables inversamente proporcionales

Decimos que dos variables son *inversamente proporcionales* cuando el producto entre los valores de estas variables se mantiene constante. El producto entre estos valores se denomina *constante de proporcionalidad*.

En términos generales, las variables x e y son inversamente proporcionales si:

$x \cdot y = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Cuando las variables x e y son inversamente proporcionales, se cumple que $(ax) \cdot \frac{y}{a} = k$, esto se puede interpretar como: al aumentar una de ellas en un factor a, la otra disminuye en el mismo factor a.

Es importante mencionar que si dos variables tienen la propiedad que, si una aumenta la otra disminuye, estas no son necesariamente variables inversamente proporcionales. Por ejemplo, si $y = 100 - x$, a medida que x aumenta y disminuye, pero el producto $x \cdot y$ no es constante.

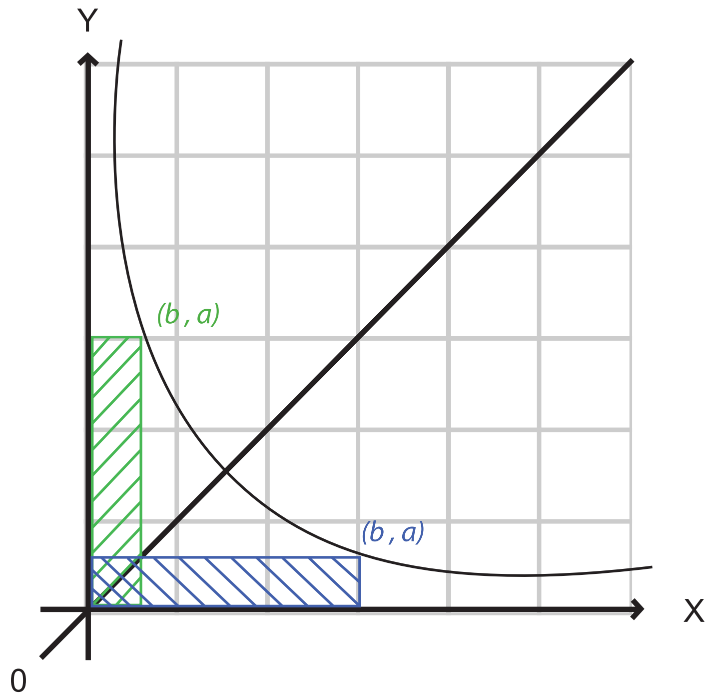
Tal como en la sección anterior, consideraremos que tanto las variables x e y, como la constante de proporcionalidad, toman valores mayores a cero.

3.2 Representación gráfica de variables inversamente proporcionales

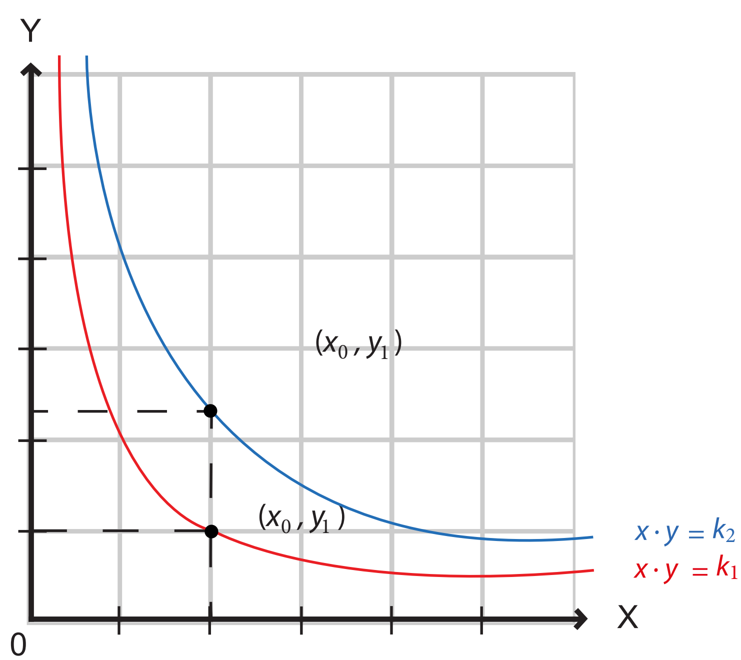
Para efectos de este curso, consideramos que tanto las variables x e y, como la constante de proporcionalidad, toman valores mayores a cero.

El gráfico de dos variables x e y inversamente proporcionales corresponde a una curva, denominada hipérbola, que no corta los ejes coordenados. Además, esta curva cumple que si el punto (*a, b*) pertenece a ella, entonces (*b, a*) también, debido a que si $a \cdot b = k$ entonces $b \cdot a = k$. Esta propiedad implica que el gráfico es simétrico respecto de la recta $y = x$, como se muestra a continuación.

[i] Notar que y=x es una relación de proporcionalidad directa con constante 1, por lo tanto, su gráfico es una recta que pasa por el origen.



En la siguiente imagen observamos qué rol juega la constante de proporcionalidad en el gráfico de variables inversamente proporcionales. Para esto consideramos variables inversamente proporcionales con distintas constantes de proporcionalidad, $k_1 < k_2$.



Veamos que, en la hipérbola de color rojo a la abscisa x_0 le corresponde la ordenada y_1 , mientras que en la hipérbola azul a la misma abscisa x_0 le corresponde la ordenada y_2, entonces podemos escribir las constantes de proporcionalidad de la forma $k_1 = x_0 \cdot y_1$ y $k_2 = x_0 \cdot y_2$. Como y_1 e y_2 están multiplicados por el mismo valor x_0 y, además, y_1 es menor que y_2, se tiene que k_1 es menor que k_2. Así, mientras menor sea la constante de proporcionalidad, la hipérbola estará más cerca de los ejes coordenados.

III. Algunas dificultades en el trabajo con razones, porcentajes y relaciones de proporcionalidad

• Como las razones se pueden representar por la notación de un número fraccionario un error probable es operar con ellas como se hace con los números. Por ejemplo, un error común es que al combinar razones, se realice una suma de fracciones.

Ejemplo:
Una jarra de limonada está preparada con 2 vasos de jugo de limón y 5 vasos de agua. Marcela mezcla esa jarra con otra limonada que está preparada con 1 vaso de jugo de limón y 3 vasos de agua. ¿Cuál es la razón entre las cantidades de limón y agua en la limonada generada con la mezcla de las otras dos?

Un posible error sería sumar $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$ y decir que la razón en la limonada es 11:15. Al juntar las limonadas habrá en total 3 vasos de jugo de limón y 8 vasos de agua, por lo que la razón entre la cantidad de limón y agua en la limonada generada con la mezcla de las otras dos es 3:8.

Asimismo en el contexto de fracciones, muchas veces un error común es sumar fracciones como si se estuvieran combinando razones, sumando así numeradores y denominadores respectivamente.

• Para aumentar (o disminuir) dos cantidades sin cambiar la razón entre ellas, no siempre es correcto agregar la misma cantidad a cada una. Para conservar la razón entre dos cantidades, si una de las cantidades se multiplica (o divide) por cierto factor, la otra se debe multiplicar (o dividir) por el mismo factor.

Ejemplo:
Jocelyn va a preparar un queque con una receta fácil que encontró en internet. Como serán más de 8 personas las que van a comer, va a agregar un poco de cada ingrediente para que el queque le quede más grande. Si agrega 1 cucharadita más de polvo de hornear, ¿cuántas tazas de azúcar tiene que agregar?

RECETA FÁCIL DE QUEQUE (8 personas)

Ingredientes:
- 250 g de harina
- 1/2 pan de mantequilla de 120 g
- 2 cucharaditas de polvos de hornear
- 1 taza de azúcar
- 2 huevos
- 2 cucharadas de leche
- 1 ½ taza de agua

Sería incorrecto decir que tiene que agregar 1 taza más de azúcar si agregó 1 cucharadita más de polvo de hornear. En la receta, la razón entre la cantidad de polvo de hornear y azúcar es 2:1 cucharaditas/tazas. Para mantener la razón, si se dividió por dos la cantidad de cucharitas de polvo de hornear, se debe dividir por dos la cantidad de tazas de azúcar. Por lo tanto, Jocelyn debe agregar media taza de azúcar si agrega una cucharadita de polvo de hornear. De esta manera las nuevas cantidades son 3 cucharaditas de polvo de hornear y 1,5 tazas de azúcar, que están en la razón 3:1,5 que es igual a 2:1.

Notar que, el único caso en que para aumentar (o disminuir) dos cantidades sin cambiar la razón entre ellas, es correcto agregar (o quitar) la misma cantidad a cada una, es cuando la razón es 1:1.

- Al comparar cantidades que involucran porcentajes hay que tener claros los totales a los que hacen referencia. Por ejemplo, si $m>n$ y se calculan el $m\%$ de una cantidad A y el $n\%$ de una cantidad B, no podemos asegurar que el $m\%$ de A sea mayor que el $n\%$ de B porque dependerá de los valores de A y B.

Ejemplo:
Según la Dirección Meteorológica de Chile, al 8 de julio de 2015 las precipitaciones caídas en Osorno representan aproximadamente un 66% de las precipitaciones caídas hasta la misma fecha del año 2014. En el caso de Juan Fernández, las precipitaciones al 8 de julio de 2015 representan aproximadamente un 75% de las precipitaciones a la misma fecha del 2014.
Al 8 de julio de 2015, ¿llovió más en Juan Fernández que en Osorno?

Que el porcentaje de lluvias de Juan Fernández, al 8 de julio de 2015, sea mayor que el de Osorno, no significa que en Juan Fernández haya llovido más hasta esa fecha. Según la Dirección Meteorológica de Chile, al 8 de julio de 2015, en Osorno cayeron 476.8 milímetros mientras que en Juan Fernández solo cayeron 343.4 milímetros. La razón por la que la cantidad de lluvia caída el 2015 en Juan Fernández es menor que en Osorno, pese a que el porcentaje es mayor, es que las lluvias en Juan Fernández en 2014 fueron mucho menores que en Osorno, es decir, los porcentajes corresponden a diferentes totales.

INFORME DE PRECIPITACIONES - Miércoles 8 de julio de 2015				
Ciudad	**Total a la fecha**	**Normal a la fecha**	**Año pasado igual fecha**	**Normal anual**
Osorno	476.8	693.5	724.7	1331.8
Juan fernández	343.4	582.7	455.2	1041.5

Fuente: http://www.meteochile.cl/inf_precipitacion.php

• Para calcular porcentajes sobre otros porcentajes es importante tener en cuenta sobre qué total se está calculando cada uno.

Ejemplo:
Si queremos calcular el 15% del 10% de 1000, ¿da lo mismo que hagamos directamente el 25% de 1000?

El 15% del 10% de 1000 no equivale a calcular el 25% de 1000 porque el 15% no se hace sobre 1000 sino sobre el 10% de 1000.

$$15\% \text{ de } 10\% \text{ de } 1000 = \frac{15}{100} \cdot \frac{10}{100} \cdot 1000 = 15$$

$$25\% \text{ de } 1000 = \frac{25}{100} \cdot 1000 = 250$$

• Si dos variables aumentan no significa automáticamente que sean directamente proporcionales.

Ejemplo:
Cuando un niño tiene 10 años, su padre tiene 40, es decir, cuatro veces la edad de su hijo. ¿Qué edad tendrá el padre cuando el hijo tenga 20 años?

Como entre los 10 y 20 años la edad del hijo se duplicó, se puede pensar que lo mismo ocurre con la del padre, es decir, el padre tendrá 80 años. Sin embargo, lo que ocurre es que se mantiene constante la diferencia entre ambas edades, es decir, siempre tendrán 30 años de diferencia, por lo que cuando el niño tenga 20 años, el padre tendrá 50 años. Es importante notar que en este ejemplo ambas variables aumentan, pero no de manera proporcional.

• Si la relación entre dos variables es tal que una aumenta y la otra disminuye, no significa automáticamente que sean inversamente proporcionales.

Ejemplo:
Se deja caer una pelota desde 10 metros de altura. Pasado un segundo, la altura de la pelota es 5 metros aproximadamente. ¿Cuántos segundos pasan desde que la pelota se dejó caer hasta que toca el suelo?

Sería tentador responder que pasarán 2 segundos hasta que la pelota toque el suelo, dado que, al pasar 1 segundo la altura se redujo a la mitad. En esta situación, a medida que pasa el tiempo, la altura de la pelota disminuye, pero esto no es suficiente para decir que las variables (altura h en metros y tiempo t en segundos) son inversamente proporcionales. La Física nos dice que estas variables se relacionan mediante la fórmula $h = 10 - 4{,}9t^2$, por lo cual, a los 1,43 segundos la pelota tocará el suelo, en lugar de 2 segundos.

• Hay problemas que aparentan ser, o el enunciado induce a pensar, que son de proporcionalidad directa o inversa, pero frente a un análisis del contexto se descubre que no lo son.

Ejemplo:
Un auto tarda 1 hora y media desde Santiago a Viña del Mar. ¿Cuánto tardarán 5 autos en hacer el mismo recorrido y a la misma velocidad?

Si los 5 autos hacen el mismo recorrido y con la misma velocidad, seguramente cada uno también tardará 1 hora y media. Aquí el enunciado induce a pensar que hay una proporcionalidad inversa involucrada, pero claramente esto no es así.

• Cuando se usa un modelo matemático para describir una situación hay que considerar que frecuentemente el modelo tiene sentido solo para cierto rango de valores de las variables. Pasado ese rango, muchas veces el modelo deja de tener validez.

Ejemplo:
El encargado de la piscina de un edificio tarda 50 minutos en limpiarla. ¿Cuánto demorarán 10 personas en limpiar la misma piscina? ¿Y 100 personas?

Sería razonable pensar que 2 personas tardarán la mitad del tiempo, es decir 25 minutos y concluir que tenemos una proporcionalidad inversa. Sin embargo no parece razonable que 10 personas demoren 5 minutos y mucho menos que 100 personas tarden medio minuto. Sería imposible que 100 personas estén limpiando al mismo tiempo una piscina de un edificio.

SUGERENCIAS PARA LA EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES

La evaluación es parte fundamental en el proceso de enseñanza ya que permite al docente monitorear el avance en los aprendizaje de sus estudiantes y el desarrollo de habilidades. Se puede llevar a cabo en distintos momentos del proceso y no solo al final de éste, su uso y características dependerán de las necesidades y propósitos planteados por el profesor.

Al inicio del estudio de *relaciones proporcionales y gráficos* se requiere tener información sobre los conocimientos previos de los estudiantes, por ejemplo, respecto de razones, fracciones o gráficos. Para ello se utiliza la evaluación como diagnóstico, pues permite tener información sobre los conocimientos de los estudiantes antes de abordar el tema en estudio. Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, la evaluación tiene un carácter formativo y es una oportunidad para que el profesor levante información sobre los logros que van teniendo sus estudiantes en el estudio de razones, proporciones, relaciones de proporcionalidad directa o inversa, etc. Dicha información permitirá orientar y reorientar el proceso de enseñanza en función de las necesidades de los estudiantes. Al finalizar el proceso de enseñanza la evaluación tiene un carácter predominantemente sumativo y permite evaluar lo que aprendieron los estudiantes y el tipo de habilidades que desarrollaron con dichos aprendizaje. Esto último permite además generar acciones remediales para mejorar los logros en aquellos aprendizajes con menores desempeños.

A continuación se presentan cuatro ejemplos de ítems de evaluación, con distintos formatos, que pueden ser usados en distintos momentos del proceso de enseñanza aprendizaje. Si bien estos cuatro ítems de evaluación requieren poner en funcionamiento las cuatro habilidades matemáticas que según el currículum los estudiantes deben desarrollar, a saber: resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar; hay una habilidad que se evalúa predominantemente sobre las otras y la hemos señalado en la tabla de especificación del ítem.

Preguntas de selección múltiple

Están compuestos por un enunciado y cuatro alternativas de respuesta, tal que solo una de ellas es correcta y las otras son distractores. Estos últimos corresponden a respuestas plausibles de ser contestadas por los estudiantes ya que se relacionan con errores comunes al estudiar el tema.
Para estas preguntas se presenta un análisis de las alternativas de respuesta con el propósito de mostrar una forma de construir distractores considerando posibles errores.

Preguntas de completación

Están compuestas por un enunciado que el estudiante debe completar usando los aprendizajes adquiridos. Si bien estas preguntas, al igual que las de selección múltiple, son de respuesta corta, la tarea de completar permite evaluar definiciones o argumentos breves de los estudiantes.
Para estas preguntas se presenta un análisis del tipo de respuestas con el propósito de mostrar una forma de construir este tipo de ítems.

Preguntas de desarrollo

Son preguntas en que se pide al estudiante desarrollar una opinión, argumento o construcción respecto del tema en estudio. Dicho desarrollo se orienta a través de instrucciones para que el estudiante demuestre lo que sabe y es capaz de hacer.

Para estas preguntas se propondrá una rúbrica de corrección, mediante la cual es posible puntuar el quehacer del estudiante en su propuesta de desarrollo. Es necesario tener claro que la rúbrica es una propuesta y puede ser modificada.

ÍTEM 1	
CONTENIDO	Razones y proporciones.
HABILIDAD MATEMÁTICA	Resolver problemas.
TIPO DE ÍTEM	De respuesta cerrada, selección múltiple.
INDICADOR DE EVALUACIÓN	Resuelven problemas usando razones y proporciones.

Un arquitecto confecciona el plano de una casa utilizando una escala en centímetros de "1 es a 100". El propietario de la casa le pide que la cocina tenga al menos 5 metros de ancho. ¿Cuál es la mínima longitud que debe tener el ancho de la cocina en el plano del arquitecto?

A. 0,05 cm.

B. 1 cm.

C. 5 cm.

D. 500 cm.

La alternativa correcta es C.

El distractor de la **alternativa A** corresponde a la cantidad de centímetros que equivale en el plano, a 5 centímetros de la construcción real (y no 5 metros). Los estudiantes que marquen esta alternativa es probable que hayan establecido correctamente una proporción usando la razón que corresponde a la escala, pero sin efectuar la conversión entre las unidades de medida de longitud. Esto es:

$$\frac{1}{100} = \frac{x}{5} \longrightarrow 5 = 100 \cdot x \longrightarrow 0{,}05 = x$$

El distractor de la **alternativa B** es uno de los términos de la razón que utiliza el arquitecto para construir el plano. Es posible que los estudiantes que seleccionen esta alternativa comprendan que dado el "1 es a 100" de la escala, a 1 cm de longitud en el plano le corresponden 100 cm de longitud en la construcción real. Sin embargo, al parecer no logran usar esta información para responder la pregunta, pues nunca la relacionan con los 5 metros solicitados por el propietario.

El distractor de la **alternativa D** es la medida mínima del ancho de la cocina, que se entrega en el enunciado del problema, en centímetros. Los estudiantes que seleccionen esta alternativa es probable que manejen estrategias de conversión entre unidades de medida de longitud. Sin embargo, no logran establecer una proporción que les permita calcular la cantidad de centímetros en el plano a la que equivalen 500 cm en la construcción real.

ÍTEM 2	
CONTENIDO	Proporcionalidad directa.
HABILIDAD MATEMÁTICA	Representar.
TIPO DE ÍTEM	De respuesta corta, completación.
INDICADOR DE EVALUACIÓN	Identifican el gráfico que corresponde a una relación de proporcionalidad directa.

La longitud del lado de un triángulo equilátero y su perímetro se relacionan a través de una relación de proporcionalidad directa.
¿Cuál de las siguientes figuras muestra el gráfico que relaciona la longitud del lado de un triángulo equilátero y su perímetro?

FIGURA A

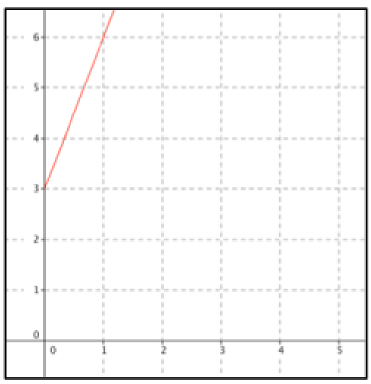


FIGURA B

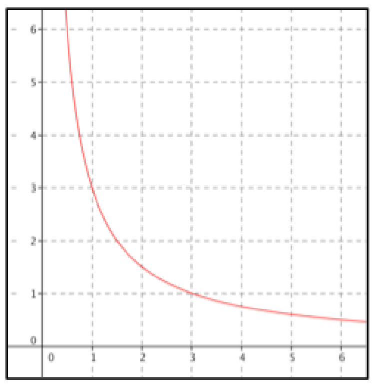
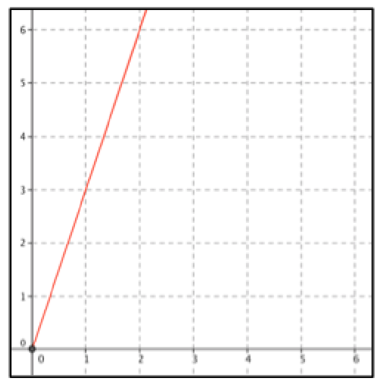


FIGURA C



La figura _____ corresponde al gráfico que relaciona la longitud del lado de un triángulo equilátero y su perímetro, porque su gráfica es ____.

A diferencia de los ítems de selección múltiple, este tipo de pregunta permite evaluar argumentaciones breves de los estudiantes. En este caso la respuesta correcta es la figura C que corresponde a una recta que pasa por el origen. La justificación requerida para esto, sería señalar que la gráfica corresponde a una recta que pasa por el origen ya que la longitud del lado del triángulo y su perímetro se relacionan de manera directamente proporcional.

Es posible que algunos estudiantes señalen que la figura correcta es la A pues también corresponde a una línea recta; sin embargo, dicha recta no pasa por el origen. También algunos estudiantes podrían señalar que la figura correcta es la B pues confunden el gráfico de las relaciones de proporcionalidad directa con el gráfico de las relaciones de proporcionalidad inversa.

ÍTEM 3	
CONTENIDO	Porcentajes.
HABILIDAD MATEMÁTICA	Argumentar y comunicar.
TIPO DE ÍTEM	De respuesta abierta y desarrollo.
INDICADOR DE EVALUACIÓN	Evalúan afirmaciones relacionadas con porcentajes.

En una tienda hicieron una promoción solo por el día sábado que consistía en aplicar un 10% de descuento a cualquier producto de la tienda.

Isabel escogió la polera y al pasar por caja la vendedora le comento que haría un 30% de descuento por la promoción. Isabel no está de acuerdo con la vendedora y le pide que descuente primero el 20% de descuento adicional y luego el 10% de la promoción al precio de la polera, pues afirma que en ese caso pagará menos.

¿Le conviene a Isabel lo que está pidiendo? Justifica tu respuesta.

____

____

____

____.

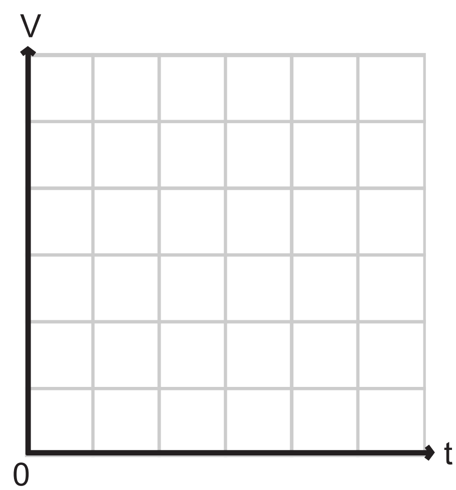
Rúbrica de corrección			
Dimensión	**3**	**2**	**1**
Evaluar afirmaciones y argumentar la respuesta.	Señala que **NO le conviene a Isabel**. **Argumenta mostrando los cálculos** o haciendo alusión a los **porcentajes como operador** que al calcular el 30% a $8000 se obtiene un valor menor que al calcular el 10% de $8000 con un 20% de descuento.	Señala que **NO le conviene a Isabel**. Señala que al calcular el 30% a $8000 se obtiene un valor menor que al calcular el 10% de $8000 con un 20% de descuento. Pero **NO argumenta adecuadamente y NO muestra cálculos que conduzcan a la respuesta correcta**. O también hace cálculos, pero no responde o elabora algún argumento.	Señala que **SI le conviene a Isabel.** O Señala que **NO está de acuerdo con Isabel**, pero **NO** argumenta.

ÍTEM 3	
CONTENIDO	Proporcionalidad Inversa.
HABILIDAD MATEMÁTICA	Modelar .
TIPO DE ÍTEM	De respuesta abierta y construcción.
INDICADOR DE EVALUACIÓN	Modelan una relación de proporcionalidad inversa en el plano cartesiano.

La distancia entre dos ciudades A y B es de 120 kilómetros. Un móvil recorre dicha distancia en 1 hora a una velocidad constante de 120 km/hora. Otro móvil recorre la misma distancia pero en 2 horas a una velocidad constante de 60 km/hora. Un tercer móvil va de la ciudad A a la B y se demora 3 horas a una velocidad constante de 40 km/hora.

Completa las celdas en gris de la tabla y grafica la relación entre el tiempo que se demora un móvil en recorrer la distancia entre A y B, y la velocidad constante que utiliza para hacerlo.

Tiempo (en horas)	**Velocidad (en km / horas)**
1	120
2	60
3	40
4	
	24



¿Qué tipo de relación hay entre estas dos variables? Justifica tu respuesta.

____

____

____

____.

Rúbrica de corrección			
Dimensión	**3**	**2**	**1**
Representar una relación de proporcionalidad.	**Completan la tabla** correctamente en los valores tiempo y velocidad. **Ubican** correctamente los **puntos** de la tabla en el plano cartesiano.	**Completan la tabla** correctamente en los valores tiempo y velocidad. **Pero NO ubican** correctamente los **puntos** de la tabla en el plano cartesiano.	**NO completan** la tabla correctamente en los valores tiempo y velocidad. **Y NO ubican** correctamente los **puntos** de la tabla.
Modelar una relación de proporcionalidad inversa.	Señalan que la relación entre las variables es de **proporcionalidad inversa**. Justifican **esbozando** una hipérbola como **gráfica** de la relación o mostrando que el producto entre las variables es constante.	Señalan que la relación entre las variables es de **proporcionalidad inversa**. Pero **NO justifican esbozando** una hipérbola como **gráfica** de la relación o mostrando que el producto entre las variables es constante.	Señalan que la **relación entre las variables es de otro tipo distinto** a proporcionalidad inversa.

ASPECTOS CURRICULARES

ASPECTOS CURRICULARES DEL CURSO

Para el diseño y construcción de este curso se hizo un análisis del currículum en Educación Básica y Media, y se identificaron los aprendizajes esperados (AE) y objetivos de aprendizaje (OA) que abordan temas vinculados con el estudio de las relaciones proporcionales y el análisis y construcción de gráficos. La Tabla 1 muestra la progresión de los objetivos de aprendizaje y la Tabla 2 señala la progresión de los aprendizajes esperados.

Es importante destacar que los objetivos de aprendizaje o aprendizajes esperados son de carácter general y por ello muchas veces incluyen contenidos que no aparecen en forma explícita en su definición. Por ejemplo, el objetivo de aprendizaje OA-08 en 7º básico si bien se refiere a las relaciones de proporcionalidad directa e inversa, para su estudio es necesario retomar razones y proporciones. De esta forma, como la tabla está construida en función de temas matemáticos, si bien hay celdas que aparecen vacías en algunos niveles, esto no significa que en dicho nivel no se estudia el tema correspondiente a la fila.

Tabla 1: Objetivos de aprendizaje que abordan relaciones proporcionales y gráficos de 6º básico a 1º medio de acuerdo a las Bases Curriculares 2013.

	5º Básico	6º Básico	7º Básico	8º Básico	1º Medio
Razones		OA 03 **Demostrar** que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica y simbólica, en forma manual y/o usando software educativo.			
Porcentajes		OA 04 **Demostrar** que comprenden el concepto de porcentaje de manera concreta, pictórica y simbólica, de forma manual y/o usando software educativo.	OA 04 **Mostrar** que comprenden el concepto de porcentaje: • representándolo de manera pictórica • calculando de varias maneras • aplicándolo a situaciones sencillas	OA 05 **Resolver** problemas que involucran variaciones porcentuales en contextos diversos, usando representaciones pictóricas y registrando el proceso de manera simbólica; por ejemplo: el interés anual del ahorro.	

[i] Para 7º y 8º de educación básica y 1º de educación media, se realizó el análisis considerando tanto los Aprendizajes esperados del Marco Curricular utilizado hasta el año 2014, como los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares promulgadas en el año 2013. Lo anterior responde a la necesidad de considerar el cambio curricular que se ha venido efectuando en los últimos años para estos niveles, ya que es posible que aún hayan establecimientos educacionales que estén efectuando la transición entre ambos documentos curriculares.

	5º Básico	6º Básico	7º Básico	8º Básico	1º Medio
Proporcionalidad Directa e Inversa			OA 08 **Mostrar** que comprenden las proporciones directas e inversas: • realizando tablas de valores para relaciones proporcionales • graficando los valores de la tabla • explicando las características de la gráfica • resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas		
Gráficos	OA 16 **Identificar** y **dibujar** puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano, dadas sus coordenadas en números naturales.	OA 24 **Leer** e **interpretar** gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones.			OA 05 **Graficar** relaciones lineales en dos variables de la forma f (x,y)=ax+by; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: • creando tablas de valores con a, b fijo y x, y variable • representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo • escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación ax + by=c; a, b, c ∈ Q (decimales hasta la décima)

SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA