Álgebra y Geometría I
Prof. Gary Martínez
Ayudante Génesis Cornejo

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Pauta Prueba I

12 de Septiembre de 2025

1. Pruebe los siguientes enunciados:

   a) Sea A un conjunto no vacío y $\mathcal{R} \subset A \times A$ una relación en A. Si $\mathcal{R}$ es transitiva y a la vez una función inyectiva, entonces $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

   b) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

   Solución:

   a) Dado que $\mathcal{R}$ es una función, podemos escribir

   $$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times A \mid b = f(a)\}.$$

   Para todo $a \in A$ se tiene que $(a, f(a)) \in \mathcal{R}$ y, en particular, también se tiene que $(f(a), f(f(a)) \in \mathcal{R}$. Por la transitividad de $\mathcal{R}$ se tiene que $(a, f(f(a))) \in \mathcal{R}$. Luego, como $\mathbb{R}$ es una función, se tiene que $f(f(a)) = f(a)$. De la inyectividad de f se sigue que $f(a) = a$ para todo $a \in A$. Esto implica que f es la función identidad y, por tanto,

   $$\mathcal{R} = \{(a, a) \in A \times A \mid a \in A\}.$$

   Esta relación es claramente refleja y simétrica. Por tanto, es de equivalencia.

   b) Sea $c \in C$. Dado que $g \circ f$ es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $g \circ f(a) = c$. Definamos $b := f(a)$. Así, tenemos que

   $$g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) = c.$$

   Así, para todo $c \in C$, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Dicho de otra manera, se tiene que g es sobreyectiva.

   $\square$

2. Sea $\mathrm{Biy}(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Considere la siguiente función:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{Biy}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Biy}(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Biy}(\mathbb{R}) \\ (f, g) &\mapsto \Psi(f, g) := g \circ f \circ (g^{-1}). \end{aligned}$$

a) Justifique por qué $\Psi(f,g)$ está en $\mathrm{Biy}(\mathbb{R})$.

b) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero no inyectiva.

c) Pruebe que, para todo f y g en $\mathrm{Biy}(\mathbb{R})$, se cumple

$$\Psi(\Psi(f,g),\Psi(f^{-1},g)) = \Psi(f,g).$$

Solución:

a) Dado que g es biyectiva, su inversa g^{-1} existe y también es biyectiva. La composición de funciones biyectivas es biyectiva. Así, para todo par $(f,g) \in \mathrm{Biy}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Biy}(\mathbb{R})$, se tiene que $\Psi(f,g)$ es una función biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

b) Sea $f \in \mathrm{Biy}(\mathbb{R})$. Dado que $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ es una función biyectiva, se tiene que

$$\Psi(f,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1} = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f) \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = f.$$

Así, para todo $f \in \mathrm{Biy}(\mathbb{R})$, se tiene que $(f,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \in \mathrm{Biy}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Biy}(\mathbb{R})$ y $\Psi(f,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = f$. Por tanto, Ψ es sobreyectiva. Ahora, notemos que para todo $g \in \mathrm{Biy}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\Psi(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},g) = g \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ g^{-1} = (g \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}.$$

Por tanto, la función no es inyectiva, pues basta con tomar $g(x) = 2x$, que no es la función identidad, para ver que $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ y $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},g)$ no son iguales y ambos pares tienen por imagen a $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

$\square$

3. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pruebe que para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot \cdots \cdot(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}.$$

Solución:

Denotemos por M_n a la multiplicación de la izquierda. Por definición se tiene que $M_1 = (1+x)$. Por otra parte,

$$\frac{x^{2^1}-1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1,$$

pues $x \neq 1$. Así se tiene que $M_1 = \dfrac{x^{2^1}-1}{x-1}$ y, por tanto, la afirmación es cierta para $n=1$.

Supongamos que la afirmación es cierta para algún $n \geq 1$. Es decir,

$$M_n = (1+x)\cdot(1+x^2)\cdot \cdots \cdot(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}.$$

Probemos que el enunciado es cierto para $n+1$. Por definición,

$M_{n+1} = (1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^{(n+1)-1}}) = (1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})$.

Reescribiendo la multiplicación anterior para exponer un término más de la multiplicación se tiene que

$$M_{n+1} = (1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^{n-1}})\cdot(1+x^{2^n}).$$

Notemos que

$$M_{n+1} = \underbrace{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^{n-1}})}_{M_n}\cdot(1+x^{2^n}).$$

Así, $M_{(n+1)} = M_n\cdot(1+x^{2^n})$. Luego, por hipótesis inductiva, se tiene

$$M_{n+1} = \frac{(x^{2^n}-1)}{x-1}\cdot(1+x^{2^n}).$$

De esta manera,

$$M_{n+1} = \frac{(x^{2^n}-1)}{x-1}\cdot(1+x^{2^n}) = \frac{\left(x^{2^n}\right)^2-1}{x-1} = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}.$$

Probando así lo buscado. De esta manera, por el Principio de Inducción, el enunciado es cierto.

□

Hay una manera de probar este enunciado sin usar inducción.

Solución alternativa:

Sea $n \geq 1$. Note que

$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^{n-1}}) = \dfrac{(1-x)}{(1-x)}\cdot(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^{n-1}})$.

Dado que $(1-x)(1+x) = (1-x^2)$ uno tiene que

$$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{(1-x^2)}{(1-x)}\cdot(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^{n-1}}).$$

Siguiendo este procedimiento, se llega a que

$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^{n-1}}) = \dfrac{(1-x^{2^{n-1}})}{(1-x)}\cdot(1+x^{2^{n-1}}) = \dfrac{1-x^{2^n}}{1-x} = \dfrac{x^{2^n}-1}{x-1}$.

□

4. Si sabe que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface $4 = \dfrac{3}{a_1} = a_n + \dfrac{3}{a_{n+1}}$ para todo $n \geq 2$, pruebe que

$$a_n = \frac{3^{n+1}-3}{3^{n+1}-1}.$$

Solución:

Procederemos por Principio de Inducción. Por una parte, $a_1 = \frac{4}{3}$ por definición. Por otro lado,

$$\frac{3^2-3}{3^2-1} = \frac{3(3-1)}{(3+1)(3-1)} = \frac{3}{4}.$$

Supongamos ahora que el enunciado es cierto para algún $n \geq 1$. Es decir,

$$a_n = \frac{3^{n+1}-3}{3^{n+1}-1}.$$

Afirmamos que el enunciado es cierto para $n+1$. Es decir,

$$a_{n+1} = \frac{3^{(n+1)+1}-3}{3^{(n+1)+1}-1}.$$

Por definición, se tiene que $a_{n+1} = \dfrac{3}{4-a_n}$. Así, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{3}{4 - \dfrac{3^{n+1}-3}{3^{n+1}-1}} \\
&= \frac{3}{\dfrac{4\cdot 3^{n+1} - 4 - 3^{n+1} + 3}{3^{n+1}-1}} \\
&= \frac{3}{\dfrac{3\cdot 3^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}} \\
&= \frac{3(3^{n+1}-1)}{3^{(n+1)+1}-1} = \frac{3^{(n+1)+1}-3}{3^{(n+1)+1}-1}.
\end{aligned}$$

Así, la afirmación es cierta para $n+1$. Luego, por el Principio de Inducción, el enunciado es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$