Álgebra y Geometría I
Prof. Gary Martínez
Ayudante Génesis Cornejo

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Guía V

22 de septiembre de 2025

§1.
Combinatoria

1. 1 Determine cuántos grupos distintos de 5 personas pueden formarse en una clase que tiene 14 estudiantes.

1. 2 Determine cuántos grupos distintos de 3 personas pueden formarse en una clase que tiene 40 estudiantes.

1. 3 Determine cuántos números naturales de 3 cifras son divisibles por 5.

1. 4 De cuántas maneras (distintas) se pueden formar números de 4 dígitos que NO contengan el 0.

1. 5 Cuántos resultados distintos puede tener una carrera en que se elige primer, segundo y tercer lugar, si son 15 participantes.

1. 6 Cuántas manos diferentes de 5 cartas hay si se juega con un mazo de 52 cartas.

1. 7 ¿Cuántos inicios de partidas de poker hay con 4 jugadores?

1. 8 Construya el Triángulo de Pascal hasta la fila 9 y resuelva lo que se pide. Verifique su resultado usando la parte que construyó del triángulo.

   a) Escriba la suma de los términos en la fila n usando el símbolo de sumatoria y calcule su resultado.

   b) Escriba usando el símbolo combinatorio la simetría que existe respecto del "centro"en cada fila.

   c) Demuestre que para todo n primo y $1 < k < n-1$, el término en la fila n columna k es divisible por n.

1. 9 *a*) Sabiendo que $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$ calcular n.

   b) Sabiendo que $\binom{25}{k} = \binom{25}{k-5}$ calcular k

   c) ¿Existe un k tal que $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$?

1. 10 Considere $n \geq k, h$ enteros positivos. Demuestre las siguientes propiedades de los coeficientes binomiales.

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

c) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

d) $\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}$

e) $\binom{n}{h}\binom{n-h}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{h}$

§2.
Binomio de Newton

2. 1 Llamando "primer término"del desarrollo de un binomio al correspondiente a $k = 0$, encuentre

   a) el quinto término de $(a + 2x^3)^{17}$ (ordenando de la manera usual la suma).

   b) el catorceavo término de $(3 - a)^{15}$ (ordenando de la manera usual la suma).

   c) el quinto término de $(\frac{a}{x} + \frac{x}{a})^{10}$ (ordenando de la manera usual la suma).

   d) los dos términos centrales de $(3a - \frac{a^3}{6})^9$.

2. 2 Pruebe que es suficiente conocer la expresión binomial para $(1 + x)^n$, para conocer la expansión general para $(a + b)^n$, con $a \neq 0$.

2. 3 Encuentre el coeficiente de x^{18} en $(x^2 - \frac{3a}{x})^{15}$.

2. 4 Encuentre los coeficientes que acompañan a x^{-3} y a x^{-7}, respectivamente, en el desarrollo de $(2x + 1)(1 + \frac{2}{x})^{15}$.

2. 5 Encuentre el coeficiente que acompaña a x^n en el desarrollo de $(1 + x)^{2n}$. Considere $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n(1 + x)^n$ y calcule el coeficiente de x^n considerando el producto.

2. 6 Encuentre el término independiente de x en el desarrollo de $(2x^2 - \frac{1}{x})^{12}$.

2. 7 Encuentre el mayor coeficiente en el desarrollo de $(6 + 5x)^{20}$.

2. 8 Encuentre, si existen, dos términos consecutivos de igual coeficiente en el desarrollo de $(3x + 2)^{19}$.

2. 9 Encuentre el mayor coeficiente en el desarrollo de $(1 + 5x)^{23}$.

2. 10 Determine n de la expresión $\binom{2n}{3} / \binom{n}{2} = \frac{44}{3}$

2. 11 Encuentre el coeficiente de x^{18} en $(x^2 - \frac{3a}{x})^{15}$.

2. 12 Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{-3} en el desarrollo de $(2x+1)(1+\frac{2}{x})^{15}$.

2. 13 Encuentre el coeficiente que acompaña a x^n en el desarrollo de $(1+x)^{2n}$. Considere $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ y calcule el coeficiente de x^n considerando el producto.

2. 14 Encuentre el término independiente de x en el desarrollo de $(2x^2 - \frac{1}{x})^{12}$.

2. 15 Encuentre el mayor coeficiente en el desarrollo de $(6+5x)^{20}$.

2. 16 Encuentre, si existen, dos términos consecutivos de igual coeficiente en el desarrollo de $(3x+2)^{19}$.

2. 17 Encuentre el mayor coeficiente en el desarrollo de $(1+5x)^{23}$.

2. 18 Pruebe que es suficiente conocer la expresión binomial para $(1+x)^n$, para conocer la expansión general para $(a+b)^n$, con $a \neq 0$.

2. 19 Llamando "primer término"del desarrollo de un binomio al correspondiente a $k=0$, encuentre

   a) el quinto término de $(a+2x^3)^{17}$ (ordenando de la manera usual la suma).
   b) el catorceavo término de $(3-a)^{15}$ (ordenando de la manera usual la suma).
   c) el quinto término de $(\frac{a}{x} + \frac{x}{a})^{10}$ (ordenando de la manera usual la suma).
   d) los dos términos centrales de $(3a - \frac{a^3}{6})^9$.

2. 20 Pruebe la desigualdad de Bernoulli usando el Teorema del Binomio.

§3.
Aplicación

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3.$$

Los ejercicios siguientes, en los que deberá aplicar lo visto en el capítulo: Inducción, progresiones, factorial, coeficiente binomial, teorema del binomio, le llevan a demostrar este Teorema.

1. Calcule algunos términos de la sucesión de números a estudiar,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

   A fin de tener una idea de su comportamiento. *Observación:* Calcule un mínimo de 10 términos. Puede usar calculadora, excel, u otro.

2. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

b) Para todo n, k naturales $k \leq n$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}.$$

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

3. Use inducción para demostrar que $2^{k-1} \leq k!$ para $k \in \mathbb{N}$.

4. Finalmente relacione y utilice todo lo anterior para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$$

Observación: Para leer algo más del número de Euler e:
Ciento cincuenta años de trascendencia, El mostrador cultura, 2024.

§4.
Sumatorias

4. 1 Calcule las siguientes sumas:

$$\sum_{k=1}^{10} 2k(k+1), \quad \sum_{m=1}^{n} 7(m-5)^2, \quad \sum_{j=4}^{n} (j-4)^2 \text{ y } \quad \sum_{i=3}^{n} j^j.$$

4. 2 Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la proposición: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$.

a) Probar que si $a(k)$ es cierta para un entero k, $a(k+1)$ también es cierta.

b) Critique la proposición « de la inducción se sigue que $a(n)$ es cierta para todo n».

c) Transforme $a(n)$ cambiando la igualdad por una desigualdad que es cierta para todo entero positivo n.

4. 3 Escriba la expresión

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110}$$

con el símbolo Σ y calcule la suma.

4. 4 ($\star$) Escriba la expresión

$$\frac{7}{10}+\frac{28}{10^3}+\frac{28}{10^5}+\frac{28}{10^7}+\frac{28}{10^9}+\frac{28}{10^{11}}+\frac{28}{10^{13}}+\frac{1}{56}$$

con el símbolo Σ y calcule la suma.

4. 5 Deduzca y pruebe la suma de los cuadrados de los primeros n naturales.

4. 6 Escriba la expresión para la suma de los números enteros positivos cúbicos hasta n, además de su Ley general.

4. 7 Escriba las siguientes sumas con el operador Sumatorio:

a) $4-7+10-13+16+\cdots$.

b) $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\frac{9}{25}+\frac{11}{35}+\cdots$.

c) $\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^6}{8}+\frac{x^8}{10}+\cdots$.

d) $x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^5-\frac{1}{4}x^7-\frac{1}{5}x^9+\cdots$.

4. 8 Demuestre por inducción:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{n}{2(3n+2)}$.

4. 9 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión. Calcule:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{a_{k+1}a_k}$, si la progresión es aritmética de diferencia d y

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_k}\right)^2$, si la progresión es geométrica de razón r.

4. 10 Calcule las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{k=5}^{n}\binom{k}{5}$

b) $\displaystyle\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}$

c) $\displaystyle\sum_{j=4}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{j}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n}i\cdot i!$.

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$

4. 11 Sea F_n la sucesión de Fibonacci. Pruebe la fórmula de Binet

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

y determine

$$\sum_{k=0}^{n} F_k.$$

4. 12 Sean a y b números reales. Pruebe usando la suma geométrica que, para todo $n \geq 1$, se tiene que

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

4. 13 ($\star$) Pruebe por inducción la siguiente afirmación:

$$\forall\, N \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!}.$$

4. 14 ($\star$) Pruebe **sin** usar inducción la siguiente afirmación:

$$\forall\, N \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!}.$$

4. 15 ($\star$) Escriba el siguiente producto usando el símbolo de productoria (Π). Haga algunos experimentos para ver su valor (distintos valores de n). Finalmente, encuentre la ley general que lo simplifica y luego demuéstrelo por inducción.

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$