Álgebra y Geometría I
Prof. Gary Martínez
Ayudante Génesis Cornejo

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Guía IV

1 de Septiembre de 2025

§1. Inducción

1. 1 Demuestre que para todo número natural n, $3n^4 + 2n^3 - 3n^2 - 2n$ es múltiplo de 24.

1. 2 Sea $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que k divide a $(k-1)^n - (-1)^n$.

1. 3 Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que 12 divide a $n(n-1)(n+1)(3n-4)$.

1. 4 Demuestre que para todo número natural n, se verifica

   a) $n^3 - n$ es un múltiplo de 6.
   b) $2^{2n} > n^2$.
   c) $2^{n+1} < (n+2)!$.
   d) $3^{2n} + 7$ es divisible por 8.
   e) $2^{2n} + 5$ es divisible por 3.
   f) $5n^3 + 7n$ es divisible por 6.
   g) $n^3 + 2n$ es divisible por 3.
   h) $7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64.
   i) $5^{2(n+1)} - 24n - 25$ es divisible por 576.
   j) $3^{2n} - 1$ es divisible por 8.

1. 5 Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n+1)} \leq \frac{5}{6}.$$

1. 6 Evalué el valor de verdad de la siguiente frase: *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $n^2 - n + 41$ *es un número primo.*

1. 7 Suponga que tiene una colección infinita de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidos por la siguiente regla: $a_1 = 7$, $a_2 = 17$ y $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$. Pruebe por inducción que para todo entero positivo n se cumple que $a_n = 2^{n+1} + 3^n$.

1. 8 Si sabe que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface $4 = \dfrac{3}{a_1} = a_n + \dfrac{3}{a_{n+1}}$ para todo $n \geq 2$, pruebe que

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 3}{3^{n+1} - 1}.$$

1. 9 Considere la siguiente colección de números

$$\begin{cases} b_1 := 1 \\ b_{k+1} := b_k + 2 \text{ para } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Escriba algunos términos de la colección de números definida y luego demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2n - 1$.

1. 10 Considere la siguiente colección de números

$$\begin{cases} A_1 := 5 \\ A_2 := 11 \\ A_{k+1} = 7A_k - 12A_{k-1} \text{ para } k \in \mathbb{N}, k \geq 2. \end{cases}$$

Escriba algunos términos de la colección de números definida y luego demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{n+1} - 4^n$.

1. 11 Pruebe por inducción las siguientes afirmaciones:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

1. 12 $\forall n \in \mathbb{N}$, a, $b \in \mathbb{R}^+$ tales que $a > b$, entonces $a^n > b^n$.

1. 13 Demostrar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < x < 1$:

$$0 < x^n < 1.$$

1. 14 ($\star$) Los siguientes ejercicios están relacionados:

a) Demuestre: Si $h > -1$, entonces $(1+h)^n \geq 1 + nh$ (desigualdad de Bernoulli).

b) Demuestre que existe un entero positivo n tal que $\left(\dfrac{100}{99}\right)^n > 100$. Ayuda: Puede usar la desigualdad de Bernoulli.

c) Demuestre que existe un primer número entero positivo n tal que

$$1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 98^n + 99^n < 100^n$$

Hint: Use el ejercicio anterior y el principio del buen orden.

1. 15 ($\star$) Se define $M_n = 2^n - 1$, llamado número de Mersenne. Demuestre lo siguiente:

a) Calcule con el computador algunos números de Mersenne. ¿Para qué n el número M_n no es primo?

b) Si M_n es primo, entonces n es primo.

c) Sean $a, n \in \mathbb{N}$ tales que $a, n > 1$. Demuestre que si $a^n - 1$ es primo, entonces $a = 2$ y n es primo.

d) Si M_n es un número primo, se llama *primo de Mersenne*. Los siguientes son hechos conocidos sobre los que puede investigar:

- Si M_n es primo de Mersenne, entonces $M_n(M_n + 1)/2$ es un número perfecto. Recuerde que un número es perfecto si y sólo si es igual a la suma de sus divisores propios. Por ejemplo el 6 es perfecto.
- Todo número perfecto par es de esa forma (Teorema probado por Euler)
- Hasta el año 2024 se conocían 52 primos de Mersenne.
- Hasta el año 2024 se conocían 52 números perfectos, todos pares.
- Hasta donde se, no hay números perfectos impares ni se sabe si existen.

1. 16 Escriba usando el símbolo de sumatoria la suma de los enteros pares positivos menores que 100. Calcule el valor.

1. 17 La secuencia de Tribonacci T_n corresponde a una generalización de la secuencia de Fibonacci, donde cada término viene dado por la suma de los tres anteriores. $\{T_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ está definida de manera recursiva, tal que

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_1 = 1 \\ T_2 = 2 \\ T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pruebe que $T_n \leq 2^{n-1}$.

1. 18 Se sabe que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 + 3n$. Calcule el valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} a_k$.

1. 19 ($\star$) Demuestre por inducción que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1)$ es proporcional a n, además de hallar la constante de proporcionalidad.

1. 20 Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_n = \begin{cases} n \cdot n! & \text{si } 1 \leq n \leq 25 \\ 2^{-3n} & \text{si } n \geq 26 \end{cases}$$

Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} a_n$.

1. 21 Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 8$ y $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Demuestre que

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. 22 Haga una demostración del Principio del Buen Orden usando el Principio de Inducción.

1. 23 Dada la afirmación "para todo $n \in \mathbb{N}$ 6 divide a $5n^3 + 7n$"

   a) Demuéstrela por Inducción, demostrando primero que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ es par.

   b) Independiente de la parte anterior, demuéstrela directamente usando el Principio del Buen Orden. *Sugerencia:* demuestre por contradicción y cree un conjunto adecuado para usar el Principio del Buen Orden.

1. 24 El plano esta dividido en regiones mediante lineas rectas. Demuestre que siempre es posible colorear las regiones usando dos colores de manera que regiones adyacentes tengan colores distintos.

1. 25 Una triangulación de un polígono es una partición de este en triángulos cuyos vértices son los vértices del polígono original. Diremos que dos vertices son adyacentes si están conectados por una arista de un triángulo. Se desea colorear los vértices del polígono de manera que vértices adyacentes tengan colores diferentes. Demuestre que el menor número de colores posible es 3.

1. 26 Demuestre que el producto de tres enteros consecutivos es siempre divisible por 6. *Una demostración directa es posible pero no es lo que se pide aquí. ¿Cómo usar inducción sobre los enteros?*

1. 27 Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\sqrt{3n+1} \leq \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{2n}{2n-1}\right).$$

1. 28 Sea x un real tal que $x + x^{-1}$ es un entero. Pruebe que $x^n + x^{-n}$ es un entero para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. 29 Demuestre que todo conjunto finito de cardinalidad n tiene 2^n subconjuntos.

§2.
Progresiones

2. 1 Encontrar el término cuarentavo y la suma de los primeros 40 términos de la P.A. : 10,8,6,...

2. 2 Encontrar la suma de los 100 primeros enteros positivos múltiplos de 7.

2. 3 Encontrar cuántos enteros consecutivos a partir de 10 se deben tomar para que sumen 2035.

2. 4 Encontrar 3 números en P.A. sabiendo que la suma del primero y el tercero es 12 y que el producto del primero con el segundo es 24.

2. 5 Encuentre tres números que cumpla que si se le restan 7 al segundo, todos forman una P.A.

2. 6 Un cuerpo cae libremente, partiendo del reposo y recorre 16mts durante el primer segundo, 48mts en el segundo, 80mts en el tercero, etc (en P.A.). Encontrar la distancia que recorre en 15 segundos.

2. 7 Encuentre 5 números entre 8 y 26 tales que todos formen una P.A.

2. 8 ¿ Cuántos números entre 1 y 36 se deben agregar para que todos (incluyendo 1 y 36) formen una P.A. y sumen 148 ?.

2. 9 Encontrar el séptimo término y la suma de los 7 primeros términos de la P.G. 9,-6,4,...

2. 10 Encontrar 3 números en P.G. tales que su suma es 26 y su producto 216.

2. 11 El primer término de una P.G. es 160 y su razón 3/2. Encontrar los términos consecutivos que se deben tomar para que su suma sea 2110.

2. 12 Demostrar que no existe un número real x de tal forma que $x, x+3, x+6$ formen una P.G.

2. 13 Encuentre 5 números entre 9 y 576 de tal forma que todos esten en P.G.

2. 14 Si a, b y c están en P.A., demuestre que la ecuación de segundo grado $ax^2 + 2bx + c = 0$ tiene a -1 como una de las soluciones.

2. 15 Si en una P.A. la suma de los primeros m términos es n, y la suma de los primeros n términos es m, calcule la suma de los primeros $n+m$ términos, bajo la suposición $n \neq m$.

2. 16 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una P.A. Demuestre que para p, q y r en $\mathbb{N}$ se cumple

$$(q-r)a_p + (r-p)a_q + (p-q)a_r = 0$$

2. 17 Sean p, q y r números primos. Encuentre todos p, q y r que estén en P.A.

2. 18 Encuentre el valor de la suma $S = 1 + 11 + 111 + ... + 11\ldots1$, donde el último término consiste en n unos.

2. 19 Encuentre el valor de la suma $S = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{n}{10^n}$

2. 20 ¿Qué término de la P.A. $5, 14, 23, \ldots$ es 239?

2. 21 ¿Cuántos números entre 1 y 36 se deben agregar para que todos (incluyendo 1 y 36) formen una P.A. y sumen 148?

2. 22 Encuentre 5 números entre 9 y 576 de tal forma que todos esten en P.G.

2. 23 Calcule:

$a)$ $\sum_{n=1}^{4} 2$

$b)$ $\sum_{n=1}^{4} n$

$c)$ $\sum_{n=3}^{5} n^{-1}$

$d)$ $\sum_{k=1}^{17} (-1)^k$

$e)$ $\sum_{j=0}^{4} j^2 - 1$

$f)$ $\sum_{l=1}^{14} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right)$

2. 24 Demuestre por Inducción que:

a) $\sum_{i=1}^{n}(3i-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

b) $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}\right)$

d) $2\cdot 5+5\cdot 8+\cdots+(3n-1)(3n+2)=3n^3+6n^2+n$

e) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k+2}{k(k+1)2^k}=1-\dfrac{1}{(n+1)2^n}$

2. 25 Escriba algunos términos de la suma dada y luego demuestre por inducción:

a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}$

d) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$