Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas
Docentes: Benjamín Moraga y Anita Rojas
Ayudante: Camila Guajardo Vásquez

Álgebra y Geometría II

Ayudantía 15 (24 de enero de 2025)

Producto punto

1. Sean $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y considere el plano

$$\Pi\colon P + tv + sw, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

a) Sea $\mathcal{L}$ la recta perpendicular a Π que pasa por P. Encuentre sus ecuaciones implícitas.

b) Calcule la distancia entre Π y la recta

$$L\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

c) Determine la distancia entre $\mathcal{L}$ y L.

2. Sea $W \neq \{0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. El *complemento ortogonal* de W es el conjunto

$$W^\perp = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 : \langle w, u \rangle = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

a) Demuestre que $W^\perp$ es un subesespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine el conjunto $W \cap W^\perp$.

c) Si la dimensión de W es n, ¿de qué dimensión es $W^\perp$?

d) Muestre que todo vector $v \in \mathbb{R}$ se puede escribir como $v = w + u$, donde $w \in W$ y $u \in W^\perp$.

3. (Ley del paralelogramo). Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Adicionalmente, si x es ortogonal a y, demuestre el **Teorema de Pitágoras**:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$