



UNIVERSIDAD DE CHILE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
DOCENTES: BENJAMÍN MORAGA Y ANITA ROJAS
AYUDANTE: CAMILA GUAJARDO VÁSQUEZ

Álgebra y Geometría II

Ayudantías 7 y 8 (14 y 15 de enero de 2025)

Inversas de matrices

1. ¿Son las siguientes matrices invertibles? Calcule el rango de su espacio de filas para decidir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

2. Considere la transformación lineal

$$T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, w, u)^t \mapsto (x, z, u)^t.$$

- Identifique una matriz M que represente a T .
- Determine la dimensión de F_M y de la de C_M (espacio fila y espacio columna de M respectivamente).
- ¿Tiene M inversa por la izquierda o por la derecha? En caso que así sea, muestre la transformación lineal correspondiente.
- ¿Es T inyectiva o sobreyectiva?

3. Considere la transformación lineal

$$f: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) \mapsto p(x+1) - p(x).$$

- De una expresión matricial para f . (**Hint:** Una base para $\mathbb{R}_3[x]$ es $\{1, x, x^2, x^3\}$ y una para $\mathbb{R}_2[x]$ es $\{1, x, x^2\}$).
- ¿Cuál es el rango del espacio de filas de la matriz que obtuvo?
- ¿Cuáles son las dimensiones de $\ker(f)$ e $\text{im}(f)$?
- ¿Tiene f inversa por la izquierda o por la derecha?

Determinantes

1. Encuentre los valores de α para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución única:

$$\begin{cases} \alpha x - y + \alpha z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \\ -x + \alpha z = 0. \end{cases}$$

Hint: calcule el determinante de la matriz asociada al sistema.

2. Considere la familia de matrices cuadradas parametrizada por el número $n \in \mathbb{N}$:

$$D_1 = (1) \in M_1(\mathbb{R}), \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Conjeture una fórmula para $\det(D_n)$ y demuéstrela por inducción.

3. (**Matrices ortogonales**) Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es *ortogonal* si $A^t A = I$.
- Muestre que si A, B son matrices ortogonales, entonces AB es ortogonal.
 - Argumente por qué las matrices de rotación en \mathbb{R}^2 son ortogonales y calcule sus determinantes
 - Muestre que si A es ortogonal, entonces $\det(A) = 1$ o $\det(A) = -1$.
 - De un ejemplo de una matriz cuyo determinante sea 1 y no sea ortogonal.