Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas
Docentes: Benjamín Moraga y Anita Rojas
Ayudante: Camila Guajardo Vásquez

Álgebra y Geometría II

Ayudantías 7 y 8 (14 y 15 de enero de 2025)

Inversas de matrices

1. ¿Son las siguientes matrices invertibles? Calcule el rango de su espacio de filas para decidir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

2. Considere la transformación lineal

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^5 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, w, u)^t &\mapsto (x, z, u). \end{aligned}$$

a) Identifique una matriz M que represente a T.

b) Determine la dimensión de F_M y de la de C_M (espacio fila y espacio columna de M respectivamente).

c) ¿Tiene M inversa por la izquierda o por la derecha? En caso que así sea, muestre la transformación lineal correspondiente.

d) ¿Es T inyectiva o sobreyectiva?

3. Considere la transformación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) - p(x). \end{aligned}$$

a) De una expresión matricial para f. (**Hint:** Una base para $\mathbb{R}_3[x]$ es $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ y una para $\mathbb{R}_2[x]$ es $\left\{1, x, x^2\right\}$).

b) ¿Cuál es el rango del espacio de filas de la matriz que obtuvo?

c) ¿Cuáles son las dimensiones de $\ker(f)$ e $\operatorname{im}(f)$?

d) ¿Tiene f inversa por la izquierda o por la derecha?

Determinantes

1. Encuentre los valores de α para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución única:

$$\begin{cases} \alpha x - y + \alpha z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \\ -x + \alpha z = 0. \end{cases}$$

Hint: calcule el determinante de la matriz asociada al sistema.

2. Considere la familia de matrices cuadradas parametrizada por el número $n \in \mathbb{N}$:

$$D_1 = (1) \in M_1(\mathbb{R}), \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Conjeture una fórmula para $\det(D_n)$ y demuéstrela por inducción.

3. **Matrices ortogonales** Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es *ortogonal* si $A^t A = I$.

a) Muestre que si A, B son matrices ortogonales, entonces AB es ortogonal.

b) Argumente por qué las matrices de rotación en $\mathbb{R}^2$ son ortogonales y calcule sus determinantes

c) Muestre que si A es ortogonal, entonces $\det(A) = 1$ o $\det(A) = -1$.

d) De un ejemplo de una matriz cuyo determinante sea 1 y no sea ortogonal.