Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas
Docentes: Benjamín Moraga y Anita Rojas
Ayudante: Camila Guajardo Vásquez

Álgebra y Geometría II

Ayudantía 6 (13 de enero de 2025)

Tranformaciones lineales

1. Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal inyectiva y sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$. ¿Para cuáles valores de m el conjunto $S = \{Tv_1, \ldots Tv_n\} \subset \mathbb{R}^m$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$?, ¿puede ser S una base de $\mathbb{R}^m$?

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y sean $v1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tales que $\{Tv_1, \ldots, Tv_k\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^m$. Demuestre que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.

3. Verdadero o falso. Justifique si la afirmación es verdadera o de un contraejemplo si es falsa.

- Hay una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\dim(\text{im}(T)) = \dim(\ker(T))$.
- Hay una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\dim(\text{im}(T)) = \dim(\ker(T))$.
- Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal sobreyectiva, entonces $n < m$.

4. Sea $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$\ker(T) = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 5x_3, x_3 = 7x_4\right\}.$$

Demuestre que T es sobreyectiva.