Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas
Docentes: Benjamín Moraga y Anita Rojas
Ayudante: Camila Guajardo Vásquez

Álgebra y Geometría II

Ayudantías 4 y 5 (9 y 10 de enero de 2025)

Espacios vectoriales

1. Determine si los siguientes subconjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

a) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \vee y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$ con la suma y producto escalar de $\mathbb{R}^3$.

b) $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 1\}$ con la suma y producto escalar de polinomios.

c) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) \mid ad - bc = 1 \right\}$ con la suma y producto escalar de matrices.

d) $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ es simétrica}\}$ con la suma y producto escalar de matrices.

2. Considere el conjunto

$$C([0, 1]) = \{f \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [0, 1]\}.$$

¿Es $C([0, 1])$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial? En el caso que lo fuese, ¿es de dimensión finita?

3. Considere la colección de matrices $X_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y los conjuntos

$$C_b = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX_b = X_bA\},$$

dotados de la suma y producto escalar de matrices.

a) Verifique que C_b es un R-espacio vectorial para cada $b \in \mathbb{R}$.

b) ¿Qué espacio es C_0?, ¿cuál es su dimensión?

c) Muestre una base para C_0.

d) Para $b \neq 0$, determine la dimensión sobre $\mathbb{R}$ de C_b.

e) Muestre una base para C_b para $b \neq 0$.

Tranformaciones lineales

1. Considere la función

$$f\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$$
$$p(x) \mapsto p(x+1) - p(x).$$

a) Verifique que f es una transformación lineal.

b) Muestre una base para $\ker(f)$.

c) Muestre una base para $\mathrm{im}(f)$.

d) Complete la base que encontró para $ker(f)$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Su *espacio dual* es el conjunto

$$V^* = \{T\colon V \to \mathbb{R} \mid T \text{ es transformación lineal}\}.$$

a) Verifique que V^*, dotado de la suma y producto escalar de funciones, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

b) ¿Cuál es la dimensión de V^*? Argumente su intuición.

c) Muestre una base para V^*.

3. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T((2,1)^t) = (1,2,3)^t$ y $T((1,1)^t) = (1,4,2)$.

a) De una expresión matricial para T.

b) Muestre una base para $\ker(T)$.

c) Muestre una base para $\mathrm{im}(T)$.

4. Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal inyectiva y sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$. ¿Para cuales valores de m el conjunto $S = \{Tv_1, \ldots Tv_n\} \subset \mathbb{R}^m$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$?, ¿puede ser S una base de $\mathbb{R}^m$?

5. Sean $S, T\colon V \to V$ transformaiones lineales definidas en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V tales que $\mathrm{im}(S) \subseteq \ker(T)$. Demuestre que $(ST)^2 = 0$.