Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas
Docentes: Benjamín Moraga y Anita Rojas
Ayudante: Camila Guajardo Vásquez

Álgebra y Geometría II

Ayudantías 1 a 5 (6 al 10 de enero de 2025)

Rotaciones en el plano

Sea $\theta \in [0, 2\pi)$ y $r_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función que a cada punto $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ le asigna el punto que se obtiene al rotar en ángulo θ a z con centro en el origen.

(a) Argumente por qué el punto $r_\theta(z)$ corresponde al vector $M_\theta z^t$, con M_θ la matriz

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(b) ¿Es r_θ una función biyectiva?

(c) ¿Es M_θ una matriz invertible? Si lo es, ¿cuál es su inversa?

(d) Considere otro ángulo $\rho \in [0, 2\pi)$ y su correspondiente matriz M_ρ. ¿A qué función corresponde el la matriz $M_\rho M_\theta$?

Sucesiones recursivas

La *sucesión de Fibonacci* es una sucesión de números naturales definida de manera recursiva como sigue: $F_0 = 0, F_1 = 1$ y para $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. En este ejercicio encontrará una fórmula cerrada (que solo depende de n) para los términos de esta sucesión.

(a) Muestre que se cumple lo siguiente para $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(b) Exprese el vector $(F_n, F_{n-1})^t$ en términos de $(F_1, F_0)^t$ y potencias de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Verifique que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

(d) Determine $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ usando la expresión anterior.

(e) Concluya determinando la fórmula cerrada para F_n.

Escalonamiento e inversas

1. Antes de viajar a la playa, Sebastián pasó al supermercado a comprar algunas cosas: agua embotellada, galletas de chocolate, galletas de limón y maní japonés. Cada botella de agua cuesta \$1000, el paquete de galletas de chocolate \$300, el de galletas de limón \$150 y el maní japonés \$400. En total compró diez artículos y gastó \$5050. Luego se dió cuenta que había comprado tantos paquetes de galletas como la suma de la cantidad de botellas de agua y de paquetes de maní japonés. Además, compró cuatro veces más paquetes de maní japonés que botellas de agua.

a) ¿Cuántos artículos de cada tipo adquirió? Comente su razonamiento.

b) Exprese la situación como un sistema de ecuaciones lineales e identifique la matriz ampliada correspondiente.

c) Escalone por filas la matriz que obtuvo. Deduzca la solución al sistema y compare con su respuesta inicial.

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine las matrices que se obtienen al realizar las siguientes operaciones elementales por filas. Además, exprese tales matrices resultantes de la forma EA, con E una matriz invertible.

a) Intercambiar la segunda y tercera fila.

b) Multiplicar la segunda fila por -4.

c) Sumar dos veces la tercera fila a la primera.

3. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix},$$

donde a es un número real.

a) ¿Para qué valores de a el rango de A es maximal?

b) ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible?

c) Independientemente del valor de A, encuentre una matriz invertible E y una matriz escalonada reducida por filas P tal que $A = EP$.

4. Considere la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto (x+2y+3z, -3x-2y-z, -2x+2z). \end{aligned}$$

a) De una expresión matricial para f, es decir, de una matriz A tal que $f(\vec{v}) = A\vec{v}$.

b) Encuentre todos los vectores $\vec{v} = (x,y,z)^t$ tales que $f(\vec{v}) = (2,2,4)^t$.

c) ¿Es f una función sobreyectiva? Argumente.

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Encuentre los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ -x + y - z = 4 \\ ky + x + z = -4 \end{cases}$$

Para los valores de k que dan lugar a una solución única, ¿cuál es esa solución?

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine el rango de A.

b) ¿Es A invertible? Si lo es, determine su inversa.

c) ¿Para cuáles vectores $B = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ el sistema $Ax = B$ tiene solución?

3. Considere la matriz [1]

$$W = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix},$$

donde i es la unidad imaginaria y satisface $i^2 = -1$. Sea I_4 la matriz identidad de 4×4. Deteremine los valores $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que el sistema $(W - \alpha I_4)x = 0$ tiene solución para x.

Generación finita de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Sea $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ el siguiente conjunto de matrices:

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1. \right\}$$

En este ejercicio va a demostrar que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ está generado (multiplicativamente) por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule A^n y B^n para todo natural n.

(b) Calcule los productos ABA, BAB y $(AB)^3$. ¿Cómo se pueden expresar A^{-1} y B^{-1} en términos de A y de B?

[1] La matriz de este problema está asociada a la **Transformada de Fourier discreta**.

(c) Considere una matriz $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ de la forma $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$. ¿Cómo son sus coeficientes? Además, exprese M como un producto de potencias de A y de B.

(d) Conjeture y demuestre expresiones en términos de A y B para matrices con al menos un coeficiente nulo.

(e) Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \neq 0$ y suponga que $|a| > |c|$ (¿por qué puede suponerlo?). Usando el algoritmo de la división en enteros puede expresar $a = cq + r$ con $|r| < |c|$. ¿Qué obtiene al efectuar el siguiente producto de matrices?

$$N = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}$$

(f) Emule la expresión de N para la matriz $\begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}$. ¿Puede continuar este proceso infinitas veces?

(g) EXpliqué por qué la matriz M se puede expresar como $M = PD$ con P un producto de potencias de las matrices A y B, y $D = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para $e \in \mathbb{Z}$.

(h) Concluya que toda matriz $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ es producto de potencias de A y B.