



UNIVERSIDAD DE CHILE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
DOCENTES: BENJAMÍN MORAGA Y ANITA ROJAS
AYUDANTE: CAMILA GUAJARDO VÁSQUEZ

Álgebra y Geometría II

Ayudantía 3 (8 de enero de 2025)

Rotaciones en el plano

Sea $\theta \in [0, 2\pi)$ y $r_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función que a cada punto $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ le asigna el punto que se obtiene al rotar en ángulo θ a z con centro en el origen.

- (a) Argumente por qué el punto $r_\theta(z)$ corresponde al vector $M_\theta z^t$, con M_θ la matriz

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- (b) ¿Es r_θ una función biyectiva?
- (c) ¿Es M_θ una matriz invertible? Si lo es, ¿cuál es su inversa?
- (d) Considere otro ángulo $\rho \in [0, 2\pi)$ y su correspondiente matriz M_ρ . ¿A qué función corresponde el la matriz $M_\rho M_\theta$?

Sucesiones recursivas

La *sucesión de Fibonacci* es una sucesión de números naturales definida de manera recursiva como sigue: $F_0 = 0, F_1 = 1$ y para $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. En este ejercicio encontrará una fórmula cerrada (que solo depende de n) para los términos de esta sucesión.

- (a) Muestre que se cumple lo siguiente para $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- (b) Expresé el vector $(F_n, F_{n-1})^t$ en términos de $(F_1, F_0)^t$ y potencias de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (c) Verifique que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

- (d) Determine $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ usando la expresión anterior.

- (e) Concluya determinando la fórmula cerrada para F_n .

Escalonamiento e inversas

1. Antes de viajar a la playa, Sebastián pasó al supermercado a comprar algunas cosas: agua embotellada, galletas de chocolate, galletas de limón y maní japonés. Cada botella de agua cuesta \$1000, el paquete de galletas de chocolate \$300, el de galletas de limón \$150 y el maní japonés \$400. En total compró diez artículos y gastó \$3650. Luego se dió cuenta que había comprado tantos paquetes de galletas como la suma de la cantidad de botellas de agua y de paquetes de maní japonés. Además, compró cuatro veces más paquetes de maní japonés que botellas de agua.

- a) ¿Cuántos artículos de cada tipo adquirió? Comente su razonamiento.
- b) Expresé la situación como un sistema de ecuaciones lineales e identifique la matriz ampliada correspondiente.
- c) Escalone por filas la matriz que obtuvo. Deduzca la solución al sistema y compare con su respuesta inicial.

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine las matrices que se obtienen al realizar las siguientes operaciones elementales por filas. Además, exprese tales matrices resultantes de la forma EA , con E una matriz invertible.

- a) Intercambiar la segunda y tercera fila.
- b) Multiplicar la segunda fila por -4 .
- c) Sumar dos veces la tercera fila a la primera.

3. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix},$$

donde a es un número real.

- a) ¿Para qué valores de a el rango de A es maximal?
- b) ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible?
- c) Independientemente del valor de A , encuentre una matriz invertible E y una matriz escalonada reducida por filas P tal que $A = EP$.

4. Considere la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + 2y + 3z, -3x - 2y - z, -2x + 2z). \end{aligned}$$

- a) De una expresión matricial para f , es decir, de una matriz A tal que $f(\vec{v}) = A\vec{v}$.
- b) Encuentre todos los vectores $\vec{v} = (x, y, z)^t$ tales que $f(\vec{v}) = (2, 2, 4)^t$.
- c) ¿Es f una función sobreyectiva? Argumente.

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Encuentre los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ -x + y - z = 4 \\ ky + x + z = -4 \end{cases}$$

Para los valores de k que dan lugar a una solución única, ¿cuál es esa solución?

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Determine el rango de A .
b) ¿Es A invertible? Si lo es, determine su inversa.
c) ¿Para cuáles vectores $B = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ el sistema $Ax = B$ tiene solución?

3. Considere la matriz ¹

$$W = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix},$$

donde i es la unidad imaginaria y satisface $i^2 = -1$. Sea I_4 la matriz identidad de 4×4 . Determine los valores $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que el sistema $(W - \alpha I_4)x = 0$ tiene solución para x .

Generación finita de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Sea $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ el siguiente conjunto de matrices:

$$\text{SL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1. \right\}$$

En este ejercicio va a demostrar que $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ está generado (multiplicativamente) por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule A^n y B^n para todo natural n .
(b) Calcule los productos ABA , BAB y $(AB)^3$. ¿Cómo se pueden expresar A^{-1} y B^{-1} en términos de A y de B ?

¹La matriz de este problema está asociada a la **Transformada de Fourier discreta**.

- (c) Considere una matriz $M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ de la forma $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$. ¿Cómo son sus coeficientes? Además, exprese M como un producto de potencias de A y de B .
- (d) Conjeture y demuestre expresiones en términos de A y B para matrices con al menos un coeficiente nulo.
- (e) Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \neq 0$ y suponga que $|a| > |c|$ (¿por qué puede suponerlo?). Usando el algoritmo de la división en enteros puede expresar $a = cq + r$ con $|r| < |c|$. ¿Qué obtiene al efectuar el siguiente producto de matrices?

$$N = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}$$

- (f) Emule la expresión de N para la matriz $\begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}$. ¿Puede continuar este proceso infinitas veces?
- (g) EXpliqué por qué la matriz M se puede expresar como $M = PD$ con P un producto de potencias de las matrices A y B , y $D = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para $e \in \mathbb{Z}$.
- (h) Concluya que toda matriz $M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ es producto de potencias de A y B .