Álgebra 2
Ayudantía 15

Profesor: Luis Arenas
Ayudante: Javier Pavez

25 de Noviembre 2024

1. Sea G un grupo finito y sea K un cuerpo.

   a) Definimos el espacio de funciones de clase de G sobre K como:

   $$\mathcal{C}(K) := \{f : G \to K | f(g) = f(hgh^{-1}), \forall g, h \in G\}.$$

   Note que este es un $K-$espacio vectorial con la suma y producto escalar puntual.

   Demuestre que el conjunto de las funciones indicatriz de las clases de conjugación de G es una base de $\mathcal{C}(K)$. Concluya que la cantidad de caracteres irreducibles de G sobre K está acotada por la cantidad de clases de conjugación de G.

   b) Demuestre que $dim(Z(K[G])) = dim(\mathcal{C}(K))$.

   c) Asuma que K es algebraicamente cerrado y que la característica de K no divide al orden de G. Demuestre que la cantidad de clases de conjugación de G está acotada por la cantidad de representaciones irreducibles de G sobre K. Concluya que, en este caso, dichas cantidades coinciden.

2. Calcule la tabla de caracteres del $n-$ésimo grupo dihedral

   $$D_n = \langle r, s | r^n = e = s^2, srs = r^{-1} \rangle$$

   sobre $\mathbb{C}$. Utilice esto para escribir la representación inducida por la acción de D_n sobre $\{1, \ldots, n\}$ definida por $r(i) \equiv i + 1 \pmod{n}$ y $s(i) \equiv -i \pmod{n}$ sobre $\mathbb{C}$ como suma de representaciones irreducibles.

3. Calcule la tabla de caracteres sobre $\mathbb{C}$ para su grupo finito favorito.