ALGEBRA II.
Tarea 6

Entrega: 25/11/2024

1. Sea
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$
Encuentre todos los ideales biláteros de A.

2. Sea B el álgebra de matrices en $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ que conmutan con
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Probar que $B \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Probar que
$$\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_4) \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathbb{F}_4 \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_4) \oplus \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_4).$$

4. Sea $\mathbb{H}$ el álgebra de cuaterniones usual sobre los reales. Se define en $\mathbb{H}$ la conjugación mediante
$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk.$$
Esta álgebra es isomorfa a una subálgebra A de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. De hecho el isomorfismo está dado por
$$i \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \qquad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Describa el álgebra A. Si el cuaternion q corresponde a la matrix $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, que matrix corresponde al cuaternion $\overline{q}$?

5. Si a y b son elementos no nulos de un cuerpo K de característica distinta de 2, el álgebra de cuaterniones $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ se define como la K-álgebra generada por elementos i y j que satisfacen las identidades $i^2 = a$, $j^2 = b$ e $ij = -ji$. Pruebe que toda álgebra de cuaterniones es un álgebra central simple. Sugerencia: muestre que tiene una descomposición de la forma $K[i] \oplus K[i]j$.

6. Sean $Q_1 = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$ y $Q_2 = \left(\frac{a,c}{\mathbb{Q}}\right)$ álgebras de cuaterniones sobre $\mathbb{Q}$. Probar que $Q_1 \otimes_{\mathbb{Q}} Q_2$ es isomorfo a $\mathbb{M}_4(\mathbb{Q})$ o bien a $\mathbb{M}_2(Q_3)$ donde Q_3 es un álgebra de división. Asuma como conocido el hecho de que el producto tensorial de álgebras centrales simples es un álgebra central simple. (sugerencia: Q_1 y Q_2 contienen a $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$).