Álgebra 2
Ayudantía 14

Profesor: Luis Arenas
Ayudante: Javier Pavez

18 de Noviembre 2024

1. Sea G un grupo. Diremos que una representación $\rho : G \to GL(V)$ es reducible si existe un subespacio propio y no nulo S en V tal que $\rho(g)S \subset S$ para todo $g \in G$.

   Determine si la acción del grupo dihedral de D_n descrita en la ayudantía anterior es irreducible. Haga lo mismo para la representación inducida por la acción por traslaciones izquierdas de un grupo finito sobre si mismo.

2. Sean G un grupo y V, W espacios vectoriales sobre K. Sean $\rho_1 : G \to GL(V)$ y $\rho_2 : G \to GL(W)$ representaciones irreducibles. Demuestre que si $\varphi : V \to W$ es $G-$lineal, entonces $\varphi = 0$ o φ es un isomorfismo. Más aún, demuestre que si ρ_1 y ρ_2 son de grado finito y φ es un isomorfismo, entonces existe $\lambda \in K^*$ tal que $\varphi = \lambda Id$.

   Utilice lo anterior para demostrar que toda representación irreducible de grado finito de un grupo abeliano sobre $\mathbb{C}$ es unidimensional.

3. Sea G un grupo y F un cuerpo. Demuestre que una representación de G sobre F induce una representación de $F[G]$ y viceversa. Demuestre que una representación irreducible de G induce una representación irreducible de $F[G]$ y viceversa.

4. Diremos que una representación $\rho : G \to GL(V)$ es completamente reducible si existen submodulos irrecudibles $\{W_i\}_{i=1}^n$ tales que $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$. Demostraremos que, para un grupo finito, toda representación de grado finito sobre un cuerpo de característica nula es completamente reducible.

   a) Sea G un grupo finito y sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación sobre un cuerpo de caracteristica nula. Demuestre que existe una forma hermitiana positiva de V tal que es invariante bajo ρ.

   b) Sea G un grupo finito y $\rho : G \to GL(V)$ una representación de grado finito sobre un cuerpo de característica nula. Demuestre que ρ es completamente reducible.