ALGEBRA II.
Tarea No 5

Noviembree 11, 2024

Asuma como conocidos los siguientes hechos:

- **Si $c_1, \dots, c_n$ son números complejos distintos, las funciones $e^{c_1 x}, \dots, e^{c_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.**
- **Si α y $\beta \neq 1$ son números algebraicos (complejos), entonces $\ln(\alpha)/\ln(\beta)$ es racional o trascendente para cualquier rama escogida del logaritmo.**

1. Probar que $\cosh(x)$ es algebraico sobre $\mathbb{C}\Big(\cosh(2x)\Big)$, pero es trascendente sobre $\mathbb{C}\Big(\cos(2x)\Big)$.
2. Probar que e^{π}es trascendente.
3. Seai α una raiz de $8x^4 + 4x + 3 = 0$. Determine los enteros n tales que $n\alpha$ es un entero algebraico.
4. Probar que si α es un entero algebraico, y si β es una únidad del anillo $\mathbb{Z}(\alpha)$, entonces β/n no puede ser un entero algebraico para ningún $n > 1$.
5. Probar que para todo número algebraico α existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n\alpha$ es un entero algebraico.
6. Probar que e^{x+y} es trascendente sobre $\mathbb{C}\Big(e^{x-y}\Big)$.