

Álgebra 2

Ayudantía 13

Profesor: Luis Arenas
Ayudante: Javier Pavez

11 de Noviembre 2024

1. Sea n un número entero mayor que 2. Sea

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = 1 = s^2, srs = r^{-1} \rangle$$

el grupo dihedral de $2n$ elementos. Demuestre que las asignaciones

$$r \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \text{ y } s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

definen una representación de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$.

2. Sea G un grupo finito. Determine cuantas representaciones unidimensionales sobre $\mathbb{C}$ de G existen.
3. Sean G un grupo y X un conjunto. Demuestre que toda acción de G en X induce una representación de G en el K -espacio vectorial sobre X . ¿Es el recíproco verdadero?
4. Sea G un grupo y K un cuerpo. Se define $K[G]$ como el K -espacio vectorial generado por G . Demuestre que es una K -álgebra si se le dota con la multiplicación definida por el producto en G extendida linealmente al resto del espacio.
5. a) Sea A una K -álgebra. Se define

$$Z(A) := \{x \in A \mid xy = yx, \forall y \in A\}.$$

Demuestre que $Z(A)$ es una subálgebra de A .

- b) Sea G un grupo finito y K un cuerpo. Sea C una clase de conjugación en G . Demuestre que $\sum_{g \in C} g \in Z(K[G])$. Concluya que $\sum_{g \in G} g \in Z(K[G])$.