Álgebra 2
Ayudantía 9

Profesor: Luis Arenas
Ayudante: Javier Pavez

7 de Octubre 2024

1. Sea K un cuerpo. Sean L_1 y L_2 extensiones galoisianas de K tales que $L_1 \bigcap L_2 = K$. Demuestre que L_1L_2/K es galoisiana y
$$Gal(L_1L_2/K) \cong Gal(L_1/K) \times Gal(L_2/K).$$
Concluya que si $\{a_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto de enteros positivos libres de cuadrados y coprimos a pares, entonces
$$Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})/\mathbb{Q}) \cong (C_2)^n.$$

2. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ libre de cuadrados. Determine el cuerpo de descomposición de $x^n - m$ sobre $\mathbb{Q}$ y su grupo de Galois.

3. Determine todos los cuerpos intermedios del cuerpo de descomposición de $(x^8 - 14)(x^5 - 15)$ sobre $\mathbb{Q}$.

4. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2.
   a) Sean $d_1, d_2 \in K$ tales que ni d_1, d_2 y d_1d_2 son cuadrados. Demuestre que $K(d_1, d_2)/K$ es galoisiana y su grupo de Galois es $C_2 \times C_2$.
   b) Demuestre si el grupo de Galois de una extensión galoisiana L/K es $C_2 \times C_2$, entonces existen $d_1, d_2 \in K$ tales que ni d_1, d_2 y d_1d_2 son cuadrados y $L = K(d_1, d_2)$

5. Sea $K/\mathbb{F}_p$ una extensión finita. Demuestre que
$$\begin{aligned} \mathcal{F} : K &\to K \\ \alpha &\mapsto \alpha^p \end{aligned}$$
es el generador de $Gal(K/\mathbb{F}_p)$.