Álgebra 2
Ayudantía 8

Profesor: Luis Arenas
Ayudante: Javier Pavez

30 de Septiembre 2024

1. Sea K un cuerpo infinito. Sean $\alpha, \beta \in \overline{K}$ tales que $K(\alpha, \beta)/K$ es separable. Demuestre que existen infinitos $c \in K$ tales que $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + c\beta)$.

2. Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$, con $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$. Determine el cuerpo de descomposición E de f sobre $\mathbb{Q}$ y encuentre $s \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $E = \mathbb{Q}(s)$.

3. Sean L/F y F/K extensiones normales. ¿Es L/K normal?

4. Sea K un cuerpo y $f \in K[x]$ irreducible de grado n. Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre K. Demuestre que $[E : K] | n!$.

5. Sea F/K una extensión de grado 3. Demuestre que, si F/K no es normal, entonces:

   a) Existe una extensión L/F tal que $[L : K] = 6$.
   b) Existe un único subcuerpo $E \subset L$ tal que contiene a K y $[E : K] = 2$.
   c) Se cumple que $L = EF$.

6. Sea L/K una extensión finita. Demuestre que K es perfecto si y solo si L es perfecto.

7. Sea L/K una extensión y $\sigma \in Aut(L/K)$. Demuestre que para toda extensión intermedia F se cumple que $\sigma Aut(L/F)\sigma^{-1} = Aut(L/\sigma(F))$.