Álgebra 2
Ayudantía 7

Profesor: Luis Arenas
Ayudante: Javier Pavez

23 de Septiembre 2024

1. Sea K un cuerpo. Demuestre que x es algebraico sobre cualquier subcuerpo de $K(x)$ que contiene propiamente a K. Más aún, determine $[K(x) : K(y)]$, para todo $y \in K(x)$.

2. Determine si la extensión $\mathbb{F}_5(x)/\mathbb{F}_5(x^{10} + x^5 + 1)$ es separable o totalmente inseparable.

3. Sea F un cuerpo de característica $p > 0$. Sea $f \in F[x]$ irreducible. Demuestre que existe un único polinomio irreducible y separable $f_{\mathrm{Sep}} \in F[x]$ y un único $e \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ tales que
$$f(x) = f_{\mathrm{Sep}}(x^{p^e}).$$

4. Sea L/K una extensión algebraica. Demuestre que $L_{\mathrm{Sep}} \bigcap L_{\mathrm{T.I.}} = K$.

5. Sea L/K una extensión finita tal que L es simple sobre L_{Sep}. ¿Es L simple sobre K?

6. Sea F un cuerpo de característica $p > 0$. Demuestre que $F(x, y)/F(x^p, y^p)$ es una extensión totalmente inseparable de grado p^2. ¿Cuantas extensiones intermedias tiene?

7. Sean L/F y F/K extensiones normales. ¿Es L/K normal?

8. Sea K un cuerpo y $f \in K[x]$ irreducible de grado n. Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre K. Demuestre que $[E : K] | n!$.

9. Sea F/K una extensión de grado 3. Demuestre que, si F/K no es normal, entonces:

   a) Existe una extensión L/F tal que $[L : K] = 6$.
   b) Existe un único subcuerpo $E \subset L$ tal que contiene a K y $[E : K] = 2$.
   c) Se cumple que $L = EF$.