

Álgebra 2

Ayudantía 6

Profesor: Luis Arenas
Ayudante: Javier Pavez

9 de Septiembre 2024

1. Sea L/K una extensión. Sean $f, g \in K[x]$, y sean $\text{mcd}_K(f, g)$ y $\text{mcd}_L(f, g)$ el máximo común divisor de f y g en $K[x]$ y $L[x]$ respectivamente. Demuestre que $\text{mcd}_K(f, g)$ y $\text{mcd}_L(f, g)$ son iguales.
2. Sea K un cuerpo. Sea $\alpha \in \overline{K}$ no nulo. Demuestre que α es algebraico sobre K si y solo si existe $f \in K[x]$ tal que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}$.
3. Sea L/K una extensión algebraica. Demuestre que para cualquier colección finita de elementos $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset L$ se cumple que

$$K[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Determine que ocurre si la extensión no es algebraica.

4. Sea L/K una extensión y $\alpha \in L$ algebraico sobre K de grado n . Demuestre que $K[\alpha]/K$ tiene finitas extensiones intermedias y dé una cota para este número. ¿Se puede generalizar este resultado a una colección finita de elementos algebraicos de L ?