

Álgebra 2

Ayudantía 2

Profesor: Luis Arenas
Ayudante: Javier Pavez

12 (quizás 14) de Agosto 2024

En esta ayudantía todo anillo será considerado conmutativo y unitario, salvo si se menciona lo contrario.

1. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión mayor o igual a 3, y sea $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Demuestre existe un subespacio no trivial W en V tal que $T(W) \subset W$.
2. Sea M un R -módulo y N un submódulo de M . Demuestre que $\text{Ann}_R(M/N)M \subset N$.
3. Sea V un K -espacio vectorial y $S \in \text{End}_K(V)$. Sea W un subespacio S -invariante de V . Sean m, m_1 y m_2 los polinomios minimales de S en V, W y V/W respectivamente. Demuestre que m divide a $m_1 \cdot m_2$.
4. Diremos que un R -módulo M es fiel si $\text{Ann}_R(M) = \{0\}$. Demuestre que todo R -módulo libre es fiel. Determine si el recíproco es verdadero.
5. Demuestre que, para R -módulos M, A y B se cumple que:
 - a) $\text{Hom}_R(A \times B, M) \cong \text{Hom}_R(A, M) \times \text{Hom}_R(B, M)$.
 - b) $\text{Hom}_R(M, A \times B) \cong \text{Hom}_R(M, A) \times \text{Hom}_R(M, B)$.
6. Sea M un R -módulo libre finitamente generado. Demuestre que $\text{Hom}_R(M, R) \cong M$.
7. Sea M un R -módulo y $N \subset M$ un submódulo. Demuestre que M es Noetheriano si y solo si N y M/N son Noetherianos.
8. Determine si todo anillo Noetheriano es un DFU. Determine si el recíproco es verdadero.