

Álgebra 2

Ayudantía 1

Profesor: Luis Arenas
Ayudante: Javier Pavez

7 de Agosto 2024

1. Sea M un R -módulo y X un conjunto.
 - a) Demuestre que M^X es un R -módulo.
 - b) Demuestre que R^X es un anillo y concluya que M^X es un R^X -módulo.
2. Diremos que un R -módulo es simple si este no posee submódulos no triviales. Demuestre que un R -módulo M es simple si y solo si es isomorfo a $R/\mathfrak{m}$, para algún $\mathfrak{m}$ es un ideal máximo.
3. Sean S y S' dos R -módulos simples. Demuestre que si $\varphi : S \rightarrow S'$ es R -lineal, entonces φ es un isomorfismo o el morfismo trivial. (Este resultado es conocido como el Lema de Schur).
4. Sea M un R -módulo. Demuestre que si R es un dominio de integridad, entonces $\text{Tor}_R(M)$ es un submódulo. Determine si esto se mantiene si dejamos de asumir que R es un dominio.
5. De un ejemplo de un R -módulo finitamente generado que contenga un submódulo no finitamente generado.
6. Demuestre que si R es un anillo tal que todo R -módulo finitamente generado es libre, entonces R es un cuerpo o el anillo 0.
7. Sea M un R -módulo finitamente generado tal que existe un morfismo R -lineal $\varphi : M \rightarrow R^n$ sobreyectivo. Demuestre que $\ker(\varphi)$ es finitamente generado.
8. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión mayor o igual a 3, y sea $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ Demuestre existe un subespacio no trivial W en V tal que $T(W) \subset W$.
9. Sea M un R -módulo y N un submódulo de M . Demuestre que $\text{Ann}_R(M/N)M \subset N$.
10. Sea V un K -espacio vectorial y $S \in \text{End}_K(V)$. Sea W un subespacio S -invariante de V . Sean m, m_1 y m_2 los polinomios minimales de S en V, W y V/W respectivamente. Demuestre que m divide a $m_1 \cdot m_2$.