UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 26

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
27 de noviembre de 2024

1. Sea $u'' + p_1(t)u = 0$ y $v'' + p_2(t)v = 0$ con $p_2(t) > p_1(t)$ en (a, b). Suponga que $u(a) = v(a) = 0$ y $u'(a) = v'(a) = c > 0$. Muestre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $v(t) > u(t)$ en $(a, a + \varepsilon)$.

2. Verificar que $(0, 0)$ es un punto crítico simple para cada uno de estos sistemas y determinar su naturaleza y sus propiedades de estabilidad:

   $a)$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - 2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y + 3y^2 \end{cases}$

   $b)$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y - 3x^2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 4y + y\sin(x) \end{cases}$

3. En ecología, el modelo depredador-presa describe las interacciones dinámicas entre dos poblaciones: una población de presas (por ejemplo, conejos) y una población de depredadores (por ejemplo, zorros). Este modelo captura cómo las tasas de natalidad y mortalidad de ambas especies dependen de sus interacciones mutuas y de otros factores externos.

   Supongamos que el sistema está modelado por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

   $$x' = (a - by)x, \qquad y' = (cx - d)y - h,$$

   donde:

   - $x(t)$ representa el tamaño de la población de presas.
   - $y(t)$ representa el tamaño de la población de depredadores.
   - a es la tasa de crecimiento natural de las presas en ausencia de depredadores.
   - b mide el efecto de depredación sobre las presas.
   - c mide la efectividad de la depredación en apoyar el crecimiento de los depredadores.
   - d es la tasa de mortalidad natural de los depredadores en ausencia de presas.
   - h es un término adicional que modela la caza o eliminación constante de depredadores por factores externos.

   Responda:

a) Encuentre los puntos críticos del sistema y calcule las matrices Jacobianas asociadas.

b) Asigne valores $a = 0{,}4$, $b = 0{,}01$, $c = 0{,}003$, $d = 0{,}3$ y $h = 10$. Analice los puntos críticos obtenidos e interprete lo que estos resultados podrían significar en la dinámica depredador presa.