1. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y localmente lipschitziana, y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que la ecuación

$$x' = f(x), \quad y' = g(x)y$$

tiene una única solución para unas condiciones iniciales dadas. Encuentre la solución en el siguiente caso particular:

$$\begin{cases} x' = 2|x|, & y' = \sqrt{|x|}y \\ x(0) = 1, & y(0) = 3 \end{cases}$$

Solución. Consideremos en primer lugar el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Este problema admite una única solución $x(t; t_0, x_0)$ (es la función solución del PVI con condiciones iniciales x_0, t_0) ya que f es continua y localmente lipschitziana. Usando esta solución en la segunda ecuación podemos plantear el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = G(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con $G(t,y) = g(x(t; t_0, x_0))\, y(t)$. Como g es continua por hipótesis, la composición $g(x(t; t_0, x_0))$ es también continua, además

$$\begin{aligned} \|G(t,y) - G(t,z)\| &= \|x(t; t_0, x_0)y - x(t; t_0, x_0)z\| \\ &= \|x(t; t_0, x_0)(y - z)\| \\ &\leq \max_{t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha} \{|x(t; t_0, x_0)|\} \|y - z\| \end{aligned}$$

por lo tanto $G(t,y)$ es localmente lipschitziana en la segunda variable y por lo tanto el segundo PVI presenta una única solución.

Ahora estudiemos

$$\begin{cases} x' = 2|x| \\ x(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y' = \sqrt{|x|}\, y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

La única solución de

$$\begin{cases} x' = 2|x| \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

es $x(t) = e^{2t}$. Luego debemos resolver

$$\begin{cases} y'(t) = e^{t} y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

2. Demuestre que existe una única función continua en $[0,1]$ que satisface

$$f(t) = \frac{1}{3}\int_0^t s^2 \sin(f(s))ds \quad \forall t \in [0,1]$$

¿Es única?

Solución.

Sea $T: C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ donde

$$C([0,1]) = \{ f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua} \}$$

y definimos T de la siguiente forma

$$[T(f)](t) = \frac{1}{3}\int_0^t s^2 \operatorname{sen}(f(s))\, ds$$

Se tiene que

$$\|T(f)-T(g)\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1}\{|[T(f)](t)-[T(g)](t)|\}$$

$$\leq \frac{1}{3}\int_0^1 s^2\,|\operatorname{sen}(f(s))-\operatorname{sen}(g(s))|\,ds \leq \frac{1}{3}\int_0^1 s^2\,|f(s)-g(s)|\,ds \leq \frac{1}{9}\|f-g\|_\infty$$

Luego T es contractiva y por teorema de punto fijo de Banach, admite ún unico punto fijo.

3. Demuestre el siguiente principio de comparación de soluciones

   a) Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y localmente lipschitziana en la segunda variable. Sean también φ_1, φ_2 dos soluciones de $x' = f(t,x)$ definidas en un intervalo abierto I y $t_0 \in I$. Si $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$, entonces $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)\ \forall\, t \in I$.

   b) Si en el ítem anterior se sustituye la ecuación $x' = f(t,x)$ por $x'' = f(t,x)$,¿se sigue cumpliendo el principio de comparación?.

   c) Usando el principio de comparación demuestre que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x^2 + x - 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   tiene una única solución definida en $(-\infty, \infty)$.

Solución. a) Primero notemos que la existencia de $t_0 \in I$ tal que $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$ implica que son soluciones distintas.

Ahora supongamos que existe $t^* \in I$ tal que $\varphi_1(t^*) = \varphi_2(t^*) = x^* \in \mathbb{R}$, ahora nos formamos el siguiente problema de valor inicial

$$x' = f(t,x)$$
$$x(t^*) = x^*$$

Ya que f es continua y es localmente lipchitziana en la segunda variable, entonces el problema de valor inicial posee una única solución y como φ_1, φ_2 cumplen las condiciones iniciales esto implica

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \quad \times$$

Por lo tanto no existe $t^* \in I$ tal que $\varphi_1(t^*) = \varphi_2(t^*)$, por lo tanto $\varphi_1(t) < \varphi_2(t) \ \forall \ t \in I$.

b) Si la ecuación es de segundo orden entonces el principio de comparación ya no es válido. La ecuación del oscilador ármonico que viene dada por $x'' + w^2 x = 0$, donde sus soluciones son combinaciones de senos y cosenos que se cortan infinitamente.

c) Por teorema de Picard el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x^2 + x - 2 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \star$$

tiene solución unica en algún intervalo abierto que contenga a 0.

Por otra parte notemos que $x \equiv -2$ y $x \equiv 1$ son soluciones constantes de $x' = x^2 + x - 2$. Por lo que usando el criterio de comparación, la solución de $\star$ esta acotada por estas funciones constantes y así la función no presenta discontinuidades. Por lo tanto la podemos extender a $(-\infty, \infty)$

4. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase uno y $T-$periódica $(T > 0)$ en la variable t, es decir:

$$F(t, x) = F(t + T, x) \quad \forall \, (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Denotemos por $x(t; x_0)$ a la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Supongamos que existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$, tales que

$$F(t, x_1) > 0, \quad F(t, x_2) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R})$$

a) Probar que la función $P : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$P(x_0) = x(T; x_0)$$

está bien definida y es continua.

b) Demostrar que existe $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $P(x^*) = x^*$.

c) Deducir que la solución $x(t; x^*)$ es una función $T-$periódica.

a) Como F es de clase C^1 usando el teorema de Picard, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución, y así P está bien definida.

Para demostrar la continuidad de P lo haremos por definición, es decir, debemos probar que $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ tal que

$$\forall x^* \in [x_1,x_2] \qquad |y-x^*|<\delta \Longrightarrow |P(y)-P(x^*)|<\varepsilon$$

Para esto usaremos el teorema de dependencia continua

Supongamos válidas las hipótesis del teorema de Picard, si Φ_1 y Φ_2 son soluciones de $x'(t)=f(t,x)$ definidas en algún intervalo I que contenga a t_0, entonces existe $K>0$ tal que

$$|\Phi_1(t)-\Phi_2(t)| \leq |\Phi_1(t_0)-\Phi_2(t_0)|\, e^{K(t-t_0)} \qquad \forall\, t\in I$$

Luego desarrollando

$$|P(y)-P(x^*)| = |x(T;y)-x(T;x^*)| \leq |x(0;y)-x(0,x^*)|\, e^{KT} = |y-x^*|\, e^{KT} < \delta\, e^{KT}$$

Así que tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{e^{KT}}$ se tiene lo pedido.

b) Consideremos la función $H:[x_1,x_2]\longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$H(x) = P(x) - x$$

Usando que P es continua se tiene que H es continua, demostraremos que

$$H(x_1) = P(x_1) - x_1 > 0 \quad , \quad H(x_2) = P(x_2) - x_2 < 0$$

en tal caso podríamos usar el teorema de Bolzano para concluir la existencia de $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $0 = H(x^*) = P(x^*) - x^*$

Tenemos los siguientes casos

(i) $x(0) = x_0 > x_1$

Supongamos que existe un primer punto $t_1 > 0$ en el que se alcanzase x_1 (es decir $x(t_1) = x_1$). En es caso $x'(t_1) \leq 0$ por que $x(t)$ tiene que decrecer para alcanzar x_1, luego $x'(t_1) = F(t_1, x(t_1)) = F(t_1, x_1) > 0$ lo que es una contradicción.

Por lo tanto $x(t) > x_1$ para todo $t \geq 0$.

(ii) $x(0) = x_0 < x_2$

Usando el mismo razonamiento anterior $x(t) < x_2$ para todo $t \geq 0$

(iii) $x(0) = x_0 = x_1$, en este caso

$$x'(0) = F(0, x(0)) = F(0, x_0) = F(0, x_1) > 0$$

Así usando el mismo razonamiento que en (i) se tiene que $x(t) > x_1$ para todo $t > 0$.

(iv) $x(0) = x_0 = x_2$, en este caso

$$x'(0) = F(0, x(0)) = F(0, x_0) = F(0, x_2) < 0$$

Así usando el mismo razonamiento que en (ii) se tiene que $x(t) < x_2$ para todo $t > 0$

Luego $x(T;x_1) > x_1 \Longrightarrow x(T;x_1) - x_1 = P(x_1) - x_1 = H(x_1) > 0$

$x(T;x_2) < x_2 \Longrightarrow x(T;x_2) - x_2 = P(x_2) - x_2 = H(x_2) < 0$

Usando el teorema de Bolzano existe $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $P(x^*) = x^*$.

c) Las funciones $x(t;x^*)$ y $x(t+T;x^*)$ resuelven ambas la ecuación diferencial $x' = F(t,x)$ con la misma condición inicial, ya que

$x'(t+T;x^*) = F(t+T, x(t+T)) = F(t, x(t+T))$ satisfacen la misma ecuación diferencial

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x^* \\ x(T;x^*) = x^* = x(0+T) \end{array}\right\} \text{cumplen las mismas condiciones iniciales}$$

Por lo que usando Teorema de Picard

$$x(t;x^*) = x(t+T;x^*) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

es decir $x(t;x^*)$ es T-periódica.

$\square$