UNIVERSIDAD DE CHILE

Ayudantía 22

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
8 de noviembre de 2024

---

1. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y localmente lipschitziana, y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que la ecuación

$$x' = f(x), \quad y' = g(x)y$$

tiene una única solución para unas condiciones iniciales dadas. Encuentre la solución en el siguiente caso particular:

$$\begin{cases} x' = 2|x|, & y' = \sqrt{|x|}y \\ x(0) = 1, & y(0) = 3 \end{cases}$$

2. Demuestre que existe una única función continua en $[0, 1]$ que satisface

$$f(t) = \frac{1}{3}\int_0^t s^2 \sin(f(s))ds \quad \forall\, t \in [0, 1]$$

¿Es única?

3. Demuestre el siguiente principio de comparación de soluciones

   a) Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y localmente lipschitziana en la segunda variable. Sean también φ_1, φ_2 dos soluciones de $x' = f(t, x)$ definidas en un intervalo abierto I y $t_0 \in I$. Si $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$, entonces $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ $\forall\, t \in I$.

   b) Si en el ítem anterior se sustituye la ecuación $x' = f(t, x)$ por $x'' = f(t, x)$,¿se sigue cumpliendo el principio de comparación?.

   c) Usando el principio de comparación demuestre que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x^2 + x - 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   tiene una única solución definida en $(-\infty, \infty)$.

4. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase uno y $T-$periódica $(T > 0)$ en la variable t, es decir:

$$F(t, x) = F(t + T, x) \quad \forall\, (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Denotemos por $x(t; x_0)$ a la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Supongamos que existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$, tales que

$$F(t, x_1) > 0, \quad F(t, x_2) > 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

a) Probar que la función $P : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$P(x_0) = x(T; x_0)$$

está bien definida y es continua.

b) Demostrar que existe $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $P(x^*) = x^*$.

c) Deducir que la solución $x(t; x^*)$ es una función $T-$periódica.