1. Considere la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2py = 0$$

   a) Demuestre que la solución general es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

   donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \dots$$

$$y_2(x) = x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \dots$$

   Encuentre el enésimo sumando de ambas series y pruebe que convergen para todo $x \in \mathbb{R}$.

Notemos que $x_0=0$ es punto ordinario de la ecuación, por lo tanto podemos hallar la solución en forma de serie de potencias, sea

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$p''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Luego reemplazando en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2p\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2p a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2p a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2n a_n + 2p a_n\right] x^n = 0$$

Por lo tanto

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(p-n)a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{2(n-p)a_n}{(n+2)(n+1)}$$

$$a_2 = \frac{2(-p)a_0}{2\cdot 1} = \frac{-2pa_0}{2!} \qquad a_4 = \frac{2(2-p)a_2}{4\cdot 3} = \frac{2^2(p-2)p\,a_0}{4!} \qquad a_6 = \frac{2(4-p)a_4}{6\cdot 5} = -\frac{2^3(p-4)(p-2)p\,a_0}{6!}$$

$$a_3 = \frac{2(1-p)a_1}{3\cdot 2} = -\frac{2(p-1)a_1}{3!} \qquad a_5 = \frac{2(3-p)a_3}{5\cdot 4} = \frac{2^2(p-3)(p-1)a_1}{5!} \qquad a_7 = \frac{2(5-p)a_5}{7\cdot 6} = -\frac{2^3(p-5)(p-3)(p-1)a_1}{7!}$$

Luego

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^k (p-(2k-2))(p-(2k-4))\cdots p\,a_0}{(2k)!}$$

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2^k (p-(2k-1))(p-(2k-3))\cdots(p-1)a_0}{(2k+1)!}$$

Finalmente usando el criterio de la razón se comprueba que estas series convergen para todo $x\in\mathbb{R}$

b) Muestre que si $p = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2n$ que contiene solo potencias pares de x y que $y_2(x)$ es una serie infinita, luego muestre que lo mismo ocurre si $p = 2n + 1$.

Observando la fórmula de recurrencia si $p=2n$ para algún $n\in\mathbb{N}$, el término $a_{2n+2}=0$ y como es una recurrencia los términos siguientes también son ceros, por lo tanto $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2n$ y $y_2(x)$ es una serie infinita

Se realiza el mismo razonamiento con $p=2n+1$ para algún $n\in\mathbb{N}$.

c) Para cada número natural n se define el **enésimo polinomio de Hermite** $H_n(x)$ como el polinomio que es solución de

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

y cuyo término dominante es $2^n x^n$. Calcule los primeros 3 polinomios de Hermite.

$H_1(x) = 2x$

$H_2(x) = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

d) Pruebe que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$$

Usando que $a_{K+2} = \dfrac{-2(n-K)}{(K+1)(K+2)} a_K$, queremos encontrar $a_{n-2}, a_{n-4}, \dots$ en terminos de a_n, si cambiamos lo anterior con $K-2$ obtenemos

$$a_K = \frac{-2(n-K+2)a_{K-2}}{(K-1)K} \Longrightarrow a_{K-2} = -\frac{K(K-1)}{2(n-K+2)} a_K$$

haciendo K igual a $n, n-2, n-4, \dots$ obtenemos

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2\cdot 2} a_n$$

$$a_{n-4} = \frac{-(n-2)(n-3)}{2\cdot 4} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2\cdot 4} a_n$$

$$a_{n-6} = -\frac{(n-4)(n-5)}{2\cdot 6} a_{n-4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^2\cdot 2\cdot 4\cdot 6} a_n$$

Así $$H_n(x) = a_n\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2\cdot 4}x^{n-4} - \dots + \frac{(-1)^K n(n-1)\dots(n-2K+1)}{2^K\cdot 2\cdot 4\cdots(2K)}x^{n-2K} + \dots\right]$$

que se puede expresar

$$h_n(x) = a_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{2^{2k}\, k!\,(n-2k)!} x^{n-2k}$$

Para obtener el n-ésimo polinomio de Hermite ponemos $a_n = 2^n$ obteniendo

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

Usando

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k b_{n-2k}\right) t^n$$

Así

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}\right) t^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} t^n\right]$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xt)^n}{n!}\right] = e^{-t^2} \cdot e^{2xt} = e^{2xt-t^2}$$

Para demostrar la fórmula del enunciado

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

se tiene que

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2xt-t^2}\right)_{t=0} = e^{x^2}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right)_{t=0}$$

cambiando variable $z = x-t$ y usando $\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}$, como $t=0$ entonces $z=x$ por lo que la expresión

$$H_n(x) = e^{x^2}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{-z^2}\right)_{z=x} = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$$