Ayudantía 14

UNIVERSIDAD DE CHILE

Leonardo Letelier, Kevin Guerrero
Profesora: Paulina Cecchi
9 de octubre de 2024

---

1. Sean f y g funciones reales, demuestre que

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

2. Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

3. Muestre que si $p(s) = as^2 + bs + c$ tiene un cero repetido r_1 entonces la solución de

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

es

$$y(t) = k_0(1 - r_1 t)e^{r_1 t} + k_1 t e^{r_1 t} + \frac{1}{a}\int_0^t \tau e^{r_1 \tau} f(t-\tau)d\tau$$

4. Sea $w = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{as^2+bs+c}\right)$, donde a, b y c son contantes y $a \neq 0$.

   a) Muestre que w es solución de

$$aw'' + bw' + cw = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = \frac{1}{a}$$

   b) Sea f una función continua en $[0, \infty)$ y defina

$$h(t) = \int_0^t w(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

   use la regla de Leibniz para derivar una integral para mostrar que h es solución de

$$ah'' + bh' + ch = f, \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 0$$

1. Sean f y g funciones reales, demuestre que

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Usando el cambio de variable $\theta = t-\tau$, $d\theta = -d\tau$

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = -\int_t^0 f(\theta)\,g(t-\theta)\,d\theta = \int_0^t f(\theta)\,g(t-\theta)\,d\theta = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

2. Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Sea $g(t)=1$ la función constante, usando el teorema de la convolución

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

3. Muestre que si $p(s) = as^2 + bs + c$ tiene un cero repetido $r_1 \in \mathbb{R}$ entonces la solución de

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

es

$$y(t) = k_0(1 - r_1 t)e^{r_1 t} + k_1 t e^{r_1 t} + \frac{1}{a}\int_0^t \tau e^{r_1 \tau} f(t-\tau)d\tau$$

Aplicamos transformada de Laplace en la edo y tenemos

$$\mathcal{L}\{ay''+by'+cy\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$a\mathcal{L}\{y''\}+b\mathcal{L}\{y'\}+c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$
$$a(s\mathcal{L}\{y'\}-y'(0))+b(s\mathcal{L}\{y\}-y(0))+c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$
$$as\mathcal{L}\{y'\}+bs\mathcal{L}\{y\}+c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}+ay'(0)+by(0)$$
$$as(s\mathcal{L}\{y\}-y(0))+bs\mathcal{L}\{y\}+c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}+ay'(0)+by(0)$$
$$as^2\mathcal{L}\{y\}+bs\mathcal{L}\{y\}+c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}+ay'(0)+by(0)+asy(0)$$
$$(as^2+bs+c)\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}+ak_1+bk_0+ask_0$$
$$a(s-r_1)^2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}+(ak_1+bk_0)+ask_0$$
$$(s-r_1)^2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}+k_1-2r_1k_0+sk_0$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\frac{1}{(s-r_1)^2} + \overbrace{\frac{(k_1-2r_1k_0)+sk_0}{(s-r_1)^2}}^{*}$$

Realizamos fracciones parciales para $*$

$$\frac{(k_1+2r_1k_0)+sk_0}{(s-r_1)^2} = \frac{A}{(s-r_1)} + \frac{B}{(s-r_1)^2} = \frac{A(s-r_1)}{(s-r_1)^2} + \frac{B}{(s-r_1)^2} = \frac{As-Ar_1+B}{(s-r_1)^2}$$

Entonces

$$A = k_0 \quad y \quad -Ar_1 + B = k_1 - 2r_1 k_0$$
$$\Longrightarrow B = k_1 - 2r_1 k_0 + Ar_1$$
$$= k_1 - 2r_1 k_0 + k_0 r_1 = k_1 - r_1 k_0$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \frac{1}{(s-r_1)^2} + \frac{k_0}{(s-r_1)} + \frac{k_1 - r_1 k_0}{(s-r_1)^2}$$

Luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_0}{(s-r_1)} + \frac{k_1 - r_1 k_0}{(s-r_1)^2}\right\} = k_0 e^{r_1 t} + (k_1 - r_1 k_0) t e^{r_1 t}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \frac{1}{(s-r_1)^2}\right\} = \int_0^t \tau e^{\tau} f(t-\tau)\, d\tau$$

Por lo tanto

$$y(t) = k_0(1 - r_1 t) e^{r_1 t} + k_1 t e^{r_1 t} + \frac{1}{a}\int_0^t \tau e^{r_1 \tau} f(t-\tau)\, d\tau$$

4. Sea $w = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{as^2 + bs + c}\right)$, donde a, b y c son contantes y $a \neq 0$.

a) Muestre que w es solución de

$$aw'' + bw' + cw = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = \frac{1}{a}$$

Aplicamos transformada de Laplace a la ecuación y tenemos que

$$a\mathcal{L}\{w''\} + b\mathcal{L}\{w'\} + c\mathcal{L}\{w\} = 0$$
$$a(s^2\mathcal{L}\{w\} - sw(0) - w'(0)) + b(s\mathcal{L}\{w\} - w(0)) + c\mathcal{L}\{w\} = 0$$
$$a\left(s^2\mathcal{L}\{w\} - \frac{1}{a}\right) + bs\mathcal{L}\{w\} + c\mathcal{L}\{w\} = 0$$
$$(as^2 + bs + c)\mathcal{L}\{w\} = 1$$
$$\mathcal{L}\{w\} = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

Luego así $w = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{as^2+bs+c}\right\}$ es solución de la ecuación diferencial.

b) Sea f una función continua en $[0, \infty)$ y defina

$$h(t) = \int_0^t w(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

use la regla de Leibniz para derivar una integral para mostrar que h es solución de

$$ah'' + bh' + ch = f, \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 0$$

Usando la regla de Leibniz para

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$$

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(b(t),t)\cdot\frac{d}{dt}b(t) - f(a(t),t)\cdot\frac{d}{dt}a(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(x,t)\,dx$$

Por lo tanto

$$h'(t) = w(0)\,f(t) + \int_0^t w'(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau = \int_0^t w'(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

$$h''(t) = w'(0)\,f(t) + \int_0^t w''(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{a}f(t) + \int_0^t w''(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

Luego como $w(t)$ satisface la edo anterior, tenemos que

$$\int_0^t \left(aw''(t-\tau)+bw'(t-\tau)+cw(t-\tau)\right)f(\tau)\,d\tau=0$$

$$a\int_0^t w''(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+b\int_0^t w'(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+c\int_0^t w(t-\tau)f(\tau)\,d\tau=0$$

Luego, reemplazando $h(t), h'(t), h''(t)$ se obtiene

$$ah''(t)+bh'(t)+ch(t)=f(t)$$